

乾嘉学派算学家之“谈天三友”

陈关荣

(香港城市大学)

中国传统数学名为“算学”，起源于仰韶文化，距今约有五千年历史。在周公时代，“数”是“六艺”之一。从字义上说，1、2、3等称为“数”而“ $1 + 2 = 3$ ”等称为“算”。据考证，“算术”这一称谓源自约公元前一世纪的《九章算术》一书。该书的完整版本从西汉早期流传下来，其内容包括今天划分的算术、代数、平面几何、立体几何等方面的基础知识。以“算学”一词代表这门学科的行文始见于隋唐时代。日本明治（1868年-1912年）时期在仿效西方进行学科分类时，采用了“数学”之名取代“算学”而与Mathematics相对应。随后，“数学”这个中文译名从日本传入中国。1939年8月，民国教育部通令全国院校，一律遵用“数学”这一名称。从此，数学便取代了算学，沿用至今。

明清时期，特别是清代乾隆和嘉庆两朝即1736年到1820年之间，涌现出一个“乾嘉学派”，通过汇通、发展并运用丰富的天文学和算学知识对历法逐一加以审核验证，大体上结束了过去两千多年历法错误百出、散乱无章的局面，也带动了算法研究的长足发展。

其中特别值得介绍的是当年被称作“谈天三友”的算学家焦循（1763年-1820年）、汪莱（1768年-1813年）和李锐（1769年-1817年）。他们从研读传统的《易经》开始，受乾嘉学派提倡天文学和算学的启发和鼓舞，在深入探讨金末元初算学家李冶（1192年-1279年）和南宋算学家秦九韶（1208年-1268年）等前人著述的基础上，对经典易学中的历法部分从天文学和算学的视角加以诠释和演绎。期间，他们在研究算学过程中分别利用宋元时期发展起来的“天元术”去建立和求解高次代数方程，发展了许多新技巧并为完备代数方程理论作出了一些独立的贡献。

【一】焦循：加减乘除演算规则集大成者

焦循，字里堂，江苏扬州人。他被尊为一代通儒，是乾嘉学派著名学者之一。

焦循于1763年3月17日出生在一个书香门第。他5岁入读私塾，在那里学习《毛诗》并跟从表兄范征麟学习古文辞；10岁时跟从族父焦轼学习《说文》，开始喜欢语言和文学。11岁那年，他阅读了《诗品》和史地、天文、术算等方面的书籍，从此对地理和算学产生浓厚兴趣。当年，友人顾超宗借给他一套数学家梅文鼎（1633年-1721年）所著《梅氏丛书》，让他对天文学入了迷。到16岁，焦循通过了童子试，进入官学堂读书。在那里，他跟随江苏学政刘墉学习经学，并以其突出的算学成绩得到刘墉赏识。翌年，焦循进入扬州安定书院进修，期间主要研读《毛诗》《尔雅》《孟子》特别是《周易》。

焦循自认并非天才，但勤奋好学：“余生质极钝，然每得一书，无论其著名与否，必详阅首尾。心有所契，则手录之。余交游素少，然每有以著作教我者，无论经、史、子、集，以至小说、词曲，必详读至再而三。心有所契，则手录之。历二、三十年，盈二尺许矣。”

焦循治学经历大致可分为三个时期：学《算》期、治《易》期、习《孟》期。他为后世称道的学术成就在易学和算学两个方面。

焦循 25 岁时参加乡试不第，33 岁赴山东进入妹婿学政阮元（1764 年—1849 年）幕府，不久便随阮元到了杭州。其后五年间，焦循专注于算学。他深受明代算学家徐光启翻译的欧几里得《几何原本》影响，又学习了清代算学家方中通的《几何约》（1661 年）、李子金的《几何易简录》（1679 年）、梅文鼎的《几何通解》（1692 年）、杜知耕的《几何论约》（1700 年）以及孙元化的《几何体论》《几何用法》（1700 年）等著作，从而会通中西几何学及算学。

其时，焦循认识了汪莱和李锐两位算学家，三人成为挚友。

焦循阅读了李锐的《益古演段》和《测圆海镜》两本书，为之疏通了一些证明，随后撰写了《天元一释》二卷和《开方通释》一卷。其中，“天元”代表变量、未知量或待定量——天元术以未知量建立方程并进而求解，其技术始于金末元初的算学家李冶。到了明代算学衰落，天元术及其推广的四元术几乎失传。焦循阐明了《测圆海镜》中“立天元一”即“假设一个未知数”的意义，然后根据一元高次方程各系数符号的变化情况将方程加以分类。他在《开方通释》前半部论述了“十二式”，其中前八式为八类不同形式的高次方程，后四式则是增乘开方算法的几个关键步骤，均附以题例及算草加以说明。另外，在这些著述中，他详细地阐述了秦九韶的天元术和大衍求一术即“中国剩余定理”。在这些研究中，焦循率先使用了中文字符标注的多种数学符号，是中国开创符号数学的先驱。

中国历代算学著述多以解题为目的，未能上升到一般理论。焦循在阅读了梅文鼎的《弧三角举要》《环中黍尺》以及戴震的《勾股割圆记》等著作后，深感梅书“繁复无阶梯”，戴书又“务为简奥”，于是“取二书参之”而撰写了《释弧》，讨论了三角形和八种三角函数线的产生以及球面三角形的一些解法。此后，他又撰写《释轮》《释椭》二书，解释了圆轮和弧线的变化规律。他还阐述了丹麦天文学家第谷（Tycho Brahe, 1546 年—1601 年）天文学理论中的本轮和次轮的几何原理以及意大利天文学家卡西尼（Giovanni D. Cassini, 1625 年—1712 年）的天体椭圆轨道几何原理。焦循还有其他一些著作，后来合编为《里堂学算记》。这些关于天文、历法和几何学方面的论著在当时的学界极具影响。

焦循在算学研究方面最突出的贡献，当数他撰写的《加减乘除释》。焦循从西汉早期流传下来的《九章算术》以及初唐算学家王孝通所著的《缉古算经》中发现了一些关于加减乘除的基本规律，写成了这本巨著。该书以“加减乘除为纲，以九章分注而辨明之”。全书分八卷，第一、五两卷论述数的加减运算规则；第二卷论述二项式的乘方运算；第三卷论述数的乘除运算规则；第四、六卷论述分数的性质及其运算规则；第七卷论述各种比例问题；第八卷论述加减乘除四则混合运算规则。该书总共推导出了九十三条演算规则，其中每一条都对应着现代数学中的一个定理或公式，特别是加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、加法对乘法分配律等，在明清算学研究领域中是一部划时代的作品。

1801年，38岁的焦循中了举人，可是翌年应试礼部不第。于是，他返乡侍奉母亲，十余年不入城市，更不出仕，闭户潜心专治《易》学。焦循在易学研究中独树一帜，不依傍前人。他将传统算学中的“乘方”、“天元”、“齐同”、“比例”等法则引入易学研究，是对汉代易学的继承和发展。1817年，他写成《雕菰楼易学三书》。该书后来由阮元于1824年編集出版，成为他文辑《雕菰楼集》的第二十四卷。此外，他还有《雕菰集》一书，收录了自己创作的420首诗和326篇文章。

之后，焦循又转治《孟子》，亦兼习《礼经》。他认为圣人之道，隐言于《易》、显言于《论》、详言于《孟》。1818年，他始撰《孟子正义》一书，写成草稿三十卷。1820年9月4日，焦循因病去世，终年57岁。他留下的《孟子正义》手稿由其弟焦征于1825年付印出版。

纵观焦循一生，他知识渊博，年青时曾致力于名物考证之学，著有《群经宫室图》等书。此外，他对医、经、史、诗词、戏曲、音韵、训诂学等都有深入研究，著作等身。他的作品粗略分类有易学著作《易通释》《易图略》《易章句》《易话》《易广记》《注易日记》《易余集》，医学著作《吴氏本草》《李翁医记》《医说》《沙疹吾验篇》《种痘医书》《毛诗鸟兽草木鱼虫释》，算学著作《加减乘除释》《天元一释》《释弧》《释轮》《释坦》《开方释通》，经学著作《孟子正义》《六经补疏》《论语通释》《三礼便蒙》，史地志《毛诗地理释》《禹贡郑注释》《春秋左传补疏》《扬州府志》《北湖小志》《足征录》《邗记》，文学作品《古文尚书辨》《里堂诗集》《毛诗物名释》《仲轩词》《剧说》《雕菰楼词话》《曲考》《花部农谭》，戏曲论著《剧说》《花部农谭》，以及书信文集《雕菰集》《里堂家训》《忆书》《八五偶谈》等。他还有别的一些著述，大都收入到《焦氏丛书》之中。特别是，他的二十卷《易余龠录》将楚骚、汉赋、魏、晋、六朝至隋五言诗、唐代律诗、元曲、明八股分别作为时代文学的代表加以评注。他编著的《里堂道听录》五十卷，谈天说地，多种人物轶事、学术评论、政务得失、刑狱案牘、声韵律历之类，广泛收罗在内，其中对许多条目都加有精彩点评。

焦循的诗丰富多彩。这里从他留下的四百多个作品中遴选一首趣诗作结：

七绝《赠渔父》

烟水菰芦一钓横，偶然相遇说平生。

姓名本未传人世，不用逢人变姓名。



图1 焦循著作选示

【二】汪莱：算学与天文学并重的不羁学人

汪莱，字孝婴，号衡斋，安徽歙县人，于1768年出生在一个贫寒读书人家。他资质聪慧，从小勤奋自学，日渐习有所成。汪莱20岁丧父后独自外出谋生，先后在苏州和扬州开办小学堂，一生以授课为业。

汪莱毕生博览群书，能诗善文，在经学、训诂学、音韵学和乐律学等多方面有很深造诣，留下有《静山堂诗集》《静山堂文集》《馨氏偈句解》《十三经注疏正误》《禹贡图考》《说文声类》《乐津逢源》《衡斋诗集》等文史作品。在此之上，汪莱一生最高的造诣在算学和天文学方面。

汪莱出道时结识了焦循，受其影响开始研读《梅氏历算全书》和《数理精蕴》等算学著作。不久，他自己便撰写了《参两算经》，第一次系统地论述了非10进位制算术，列出了2至9进制的乘法表以及相关的整除问题。

1792年，24岁的汪莱自己动手制成浑天和简平等仪器，用以观测天象。同年，他撰写了天文学著作《覆载通几》，书中阐述了荷兰天文学家第谷关于日月及行星运行的规律，对一些示意图采用了几何定理来加以说明。

其后几年，是汪莱学术最活跃、成果最多的时期。他治学严谨，“人所言，不复言。所言皆人所未言与人所不能言”。他经常与同乡好友巴树谷和江玉两位学者讨论算学，完成了《弧三角形》和《勾股形》两部书稿。1798年，巴树谷将汪莱这两部著作合为一帙刊行，取名《衡斋算学》。同年，汪莱乡试不第，适逢巴树谷有失子之痛，两人惺惺相惜，“移其情”于算学，经常讨论天文学中涉及球面三角推算法的问题，“演得三千言”，成就了他《衡斋算学》第三卷的《平圆形》。次年，汪莱又应亲戚汪应埔之请，“构难题数端往诸算学”，又得一本《弧三角形》，连同旧著《递兼数理》一道，成为《衡斋算学》第四卷，内容涉及勾股术、弧矢关系、球面三角和组合理论。

1801年，汪莱来到扬州，在翰林秦恩复家教馆任职。秦家藏书极丰，汪莱在此读到了宋元数学家秦九韶和李冶的著作，并有机会与李锐、张敦仁、沈钦裴等算学家以及江藩、凌廷堪等经济学家相识。期间，汪莱写成了关于方程论的《衡斋算学》第五卷。同年秋天，汪莱离扬州赴六安，途中完成了《衡斋算学》第六卷。年底，汪廷麟在扬州为他刊刻了六卷本的《衡斋算学》。

这套《衡斋算学》是汪莱的主要算学著作，最后成书共七卷，含算书第一至第七册。其中，第一册和第四册之前半部分讨论球面三角学。汪莱特别关注球面三角形存在唯一解的条件问题。他的“量角度新法”是对梅文鼎《环中黍尺》中球面三角图解法的一个补充。第二册讨论已知勾股积与勾弦和求其他元素的勾股和较问题，指出了前辈学者梅珏成所提出的一个代数解法的不唯一性。第三册和第六册讨论割圆弧矢，第四册的后半部分讨论组合论。汪莱最重要的贡献收集在第五册和第七册，是关于方程论的讨论。在第五册中，汪莱指出二次方程有两个根。他接着列出了三次以下各类代数方程共96个，并逐一考察了其“知不知”，即是否存在唯一解的问题，其中他允许方程具有负根。汪莱还就一类三次方程讨论了根与系数的关系，独立地给出了弗朗索瓦·韦达（Francois Viete, 1540年-1603年）定理的一个特例。他这一重要工作启发了李锐对代数方程的深入研究而导出了判定方程正根个数的一般符号法则。在第七册中，汪莱讨论了正整数系数的高次方程存在正根的充分条件，他给出了18个具体例子。

《衡斋算学》第三册和第六册讨论半径与弦长的相关问题。第四册后半部分取名为“递兼数理”，第一次明确地给出了组合的定义并将组合计算公式建立在贾宪三角形规律之上，并给出了“递兼”（递归）的定义、性质、计算公式以及一些恒等式，还建立了组合与高阶等差级数之间的联系。汪莱的这些结果均与现代组合运算结果相符。顺便提及，焦循《加减乘除释》和张敦仁《辑古算经细草》两部重要算学著作都请汪莱为之作序，其序文收录在后人出版的《衡斋文集》之中。

汪莱的其他算学著作还有《校正九章算术及戴氏订讹》《四边形算法》等，大部分收集在《衡斋算学遗书合刻》之中，其最后版本是汪莱弟子夏燮于1854年刊刻的，包括《衡斋算学》七卷和《衡斋遗书》九卷。当年汪莱和后来孙子汪廷栋对两书都作过校勘。

1807年，39岁的汪莱以优贡生入京，考取了八旗官学教习，进入史馆负责纂修《天文志》和《时宪志》。1810年他42岁，被派到池州郡石埭县当训导。在那里，他廉洁奉公，尽心办学，于1813年45岁时因病不治辞世。他临终时，“两孤在抱”，孩子尚小。后来，他儿子光恒（字小衡）对数学也深有研究，在1885年出版了《小衡算说》七卷。汪莱去世之后，池州郡守为他立碑于明伦堂，表彰他的办学功绩。

汪莱志大才高，行为放荡不羁并且从不阿谀奉迎。他19岁时曾写过一首长诗给好友江玉，内中有句云：“清夜高歌忽笑谈，纷纷白雪梅花落。兴来大叫鬼神惊，各陈悲壮泪纵横。仲尼尘埃子渊天，茫茫大道将奚寻？且于风潇雨晦常相忆，看取高山石上青松质。”足见他那种持才傲物的个性。因此，他与社会习俗格格不入，被当时的乾嘉学圈视为异端人物，短短一生过得颇为窘迫落魄。

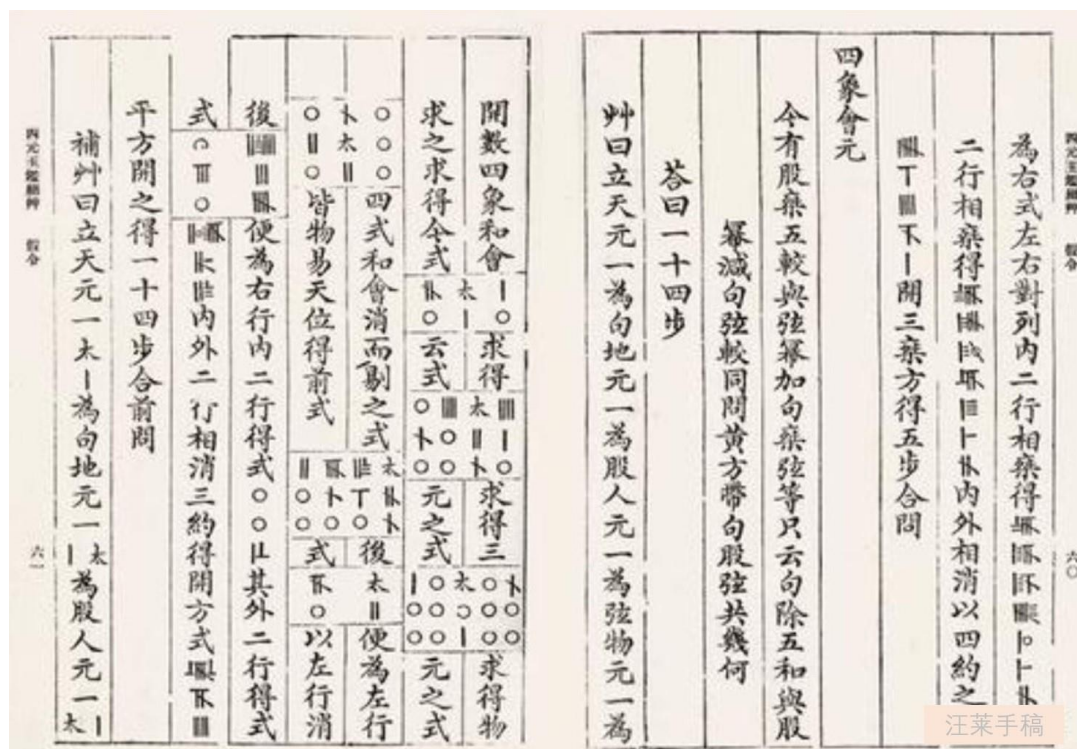


图2 汪莱算学手稿一页

【三】李锐：通晓经、史、历、算的乾嘉学者

李锐，字尚之，号四香，江苏苏州人，1768年12月8日出生。

李锐的人生和汪莱颇为相似：两人出生年份相仿，幼年均遭逢家道中落，成年后都以教书为生，同是一生贫寒，到头来也在最有作为的中年时期病逝。两人的研究兴趣亦颇为相合，都在代数方程论方面。不过，他们在学术观点上有些分歧并时有论争。至于两人的学术风格，焦循评价说汪莱如李白而李锐似杜甫，前者“超异”而后者“精实”。不过，在乾嘉学圈里，喜欢标新立异的汪莱常遭排斥而因循守旧的李锐则常被捧赞，两人的江湖地位大相径庭。

李锐10岁左后入读私塾学堂，学习了算学家程大位（1533年—1606年）编辑的《算法统宗》，对天文和数学产生极大兴趣：“每得一书，其有关历数者，必广搜博采，穷幽极微，取其精华，以资会通辅益”。1788年，20岁的李锐开始研读梅文鼎的《授时术草》。1791年，他入读苏州紫阳书院，跟随文史学者钱大昕（1728年—1804年）修学。在那里，李锐潜心研读经史，还学习了三角、小轮、椭圆算法以及“言天之作”即天文知识。一代通儒、乾嘉学派领袖人物钱大昕对李锐极为欣赏并予以厚望，认为像李锐这样的学生将来应当超越导师，说“凡为弟子，不胜其师者，不为贤弟子。”

李锐不是应试能手，参加科举考试五次均落榜而回，最后一次乡试也只得到第二名。多年里，他先后投奔阮元、张敦仁、吴廉山、刘金门、达枚等人幕下当门客，一生走过了“经学—史学—历学—算学”的修身发展道路。

李锐深谙天文历法，曾对多部历法书籍作文字注释和数理考证，著有《召诰日名考》《回回历元考》《司天通志》《历法通考》和《日法朔余强弱考》。阮元认为李锐“深于天文术，江以南第一人也”。阮元在组织校堪明朝416卷典籍《十三经注疏》时，将其中的《周易》《谷梁》《孟子》等书交由李锐负责。

1796年，应阮元之邀，李锐负责校证《测圆海镜》，刊入《知不足斋丛书》。李锐随后写成《测圆海镜细草》一书。同年，他又完成了《海岛算经图解》和《缉古算经草》两稿。

1797年，李锐除了校订《礼记正义》之外，还参与了阮元编撰46卷的中国天文算历学家传记集《畴人传》的撰写和校对。同年，他还校对了《益古演段》。

1799年，李锐研读了《宋史·律历志》之后写成《日法朔余强弱考》一卷。

1800年，李锐由焦循介绍认识了汪莱。1804年，李锐前往扬州，担任太守张仁敦的幕宾，并在那里经常与焦循和汪莱一道谈天说地、研经论学，因而得名“谈天三友”。1805年，李锐参加了《九章算术》校订。次年，他自己写成《勾股算数细草》一卷。1809年，他又写成《日法疆弱考》一卷。1814年，李锐赠给学生黎应南《开放说》一书。同年，李锐为宋代遗著《杨辉算法》一书作跋。

此外，李锐还留下了《三统术注》《四分术注》《乾象术注》《方程新术草》和《弧矢算术细草》等算学著述，其内容主要源自《九章算术》。

1817年6月30日，李锐病逝，享年48岁。

李锐才高命短，著作等身。他的《开放说》下卷后来由其弟子黎应南续完。他去世后留下许多手稿中的一部份轶文收集在《观妙居日记》里。此外，阮元组织编辑并刊刻了《李氏遗书》十七卷。李锐所著的《周易虞氏略例》及《遗书十一本》后来皆收入到《续修四库全书》之中。

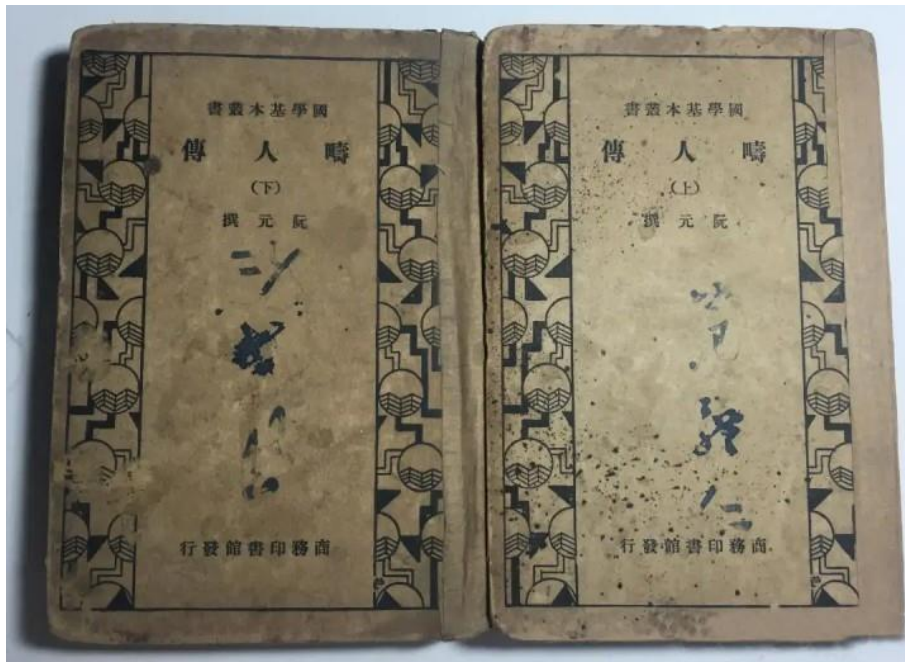


图3 阮元编撰的《畴人传》

【四】谈天后话

乾嘉学派的主要创始人是明末清初的黄宗羲（1610年—1695年）、方以智（1611年—1671年）、顾炎武（1613年—1682年）等几位大儒。

乾嘉学派对中国两千多年来的文献典籍进行了大规模的梳理和编辑。他们通过辑佚、校勘和考证工作，发掘出散失经书四百多卷，特别是失传五百多年的古算典籍《算经十书》，为十九世纪中国的算学研究提供了非常丰富的史料资源。

然而，乾嘉学派以复古为志并以儒家经典为据，不认同“西学东渐”而宣称“西学中源”，即认为西方的科学源自中国。李锐的导师钱大昕的说教便是：“数为六艺之一，由艺以明道，儒者之学也。”他认为西方科学知识和技艺都可在儒学的格物穷理和经世致用中找到根据，因而把西方传入的数学和天文学知识统称为“格物”或“格致”之学。

1711年，康熙皇帝（1661年—1722年）与直隶巡抚赵宏燮讨论算学时说：“算法之理，皆源于《易经》，即西洋算法亦善，原系中国算法。”（《东华录·康熙四九》）圣上金口一开，群臣自然一片附和了。

不过，尽管康熙偏执“西学中源”之见，他对西学极感兴趣，并且在推动中国学界接受西方数学和自然科学的过程中作出过积极的贡献。例如，1711年康熙传召法国耶稣会士傅圣泽（J.-F. Fouquet，1665年—1741年）入宫为他私人讲授西方代数学和天文学

知识；1713年，他又批示在京城建立了“蒙养斋算学馆”，邀请西方熟悉数学、物理、天文、历法的传教士前来授课并带动研究。那时，西方传教士们称之为“中国的科学院”。康熙随后任命了一批算学家编纂天文算法书籍，于1723年完成《律历渊源》一百卷，其中《数理精蕴》包括有翻译过来的《几何原本》和《算法原本》。

当然，随着越来越多西方信息进入中国，“西学中源”的观念并没有获得后人的认同。

前面说到的“谈天三友”所擅长的天元术是在金末元初由“宋元四杰”李冶、秦九韶、杨辉、朱世杰整理和发展起来的，是采用未知数列方程的一些方法。后人慢慢知道了，其实早在古希腊和古埃及时代，数学家丢番图（Diophantus，246年-330年）在他的《算术》（Arithmetike）手稿中就已经用未知数来列方程并进而求解。在该书中，丢番图已经讨论了一次和二次方程以及个别三次方程甚至某些不定方程，并允许方程系数及解为有理数。时间过了约五百年，波斯数学家和天文学家穆罕默德·花拉子米（Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi，780年-850年）发表了他的名著《代数学》（al-jabr），系统完整地论述了一次和二次方程问题及其解答。天元术的主要贡献是在处理一些高次方程的解法方面。许多年之后，法国数学家韦达在《论方程的整理和修正》（Sur la disposition et la correction des équations）一书中引进了大批代数符号并系统地综合和改良了三次及四次方程的解法，更指出了根与系数之间的关系，建立了著名的韦达定理。

稍为回顾一下我国的算学文献便会发现，当年天元术的数字书写和符号表达对于算学的普及和发展是一大障碍。图4展示了两个二次多项式的天元术书写和表达方式。今天我们都很难理解当年中国算学家们是如何做这种数学研究和方程计算的。

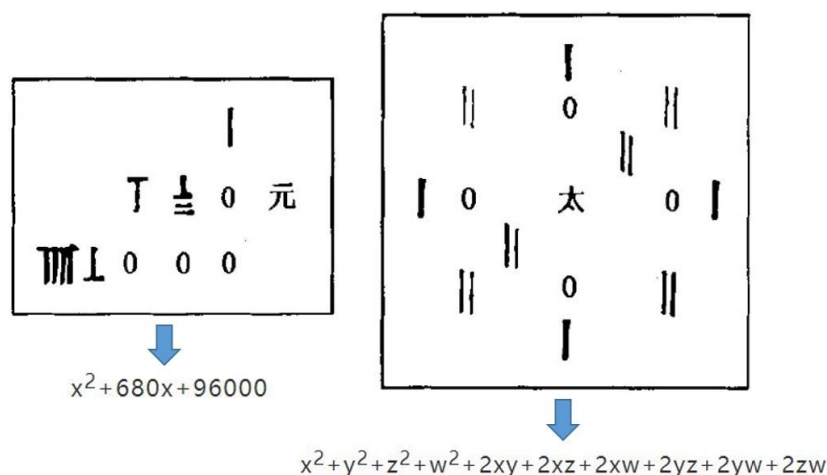


图4 两个代数项式的中文表达

从图4还可以看出，甚至连数字的表达都是件麻烦事。数学史表明，古印度人发明的数字表达在公元十世纪时通过阿拉伯人传入了欧洲，被欧洲人误认为是阿拉伯人的数字，因而称之为阿拉伯数字。远在此前，中国陆上丝绸之路于西汉时期（前202年-8年）由汉武帝派张骞出使西域便开始了，多年来阿拉伯人不但去欧洲，也到中国来经商及传播伊斯兰教义。传说公元七世纪的阿拉伯先知穆罕默德·伊本·哈希姆（Muhammad ibn Hāshim，570年-632年）就曾经讲过：“知识即使远在中国，亦当求

之。”可见阿拉伯人早已涉足中国，但中国人为何没有象欧洲人那样接纳阿拉伯数字呢？

在韦达那个年代即十六世纪末、十七世纪初，以外国传教士利玛窦（Matteo Ricci，1552年—1610年）、汤若望（Adam Schall Von Bell，1592年—1666年）和南怀仁（Ferdinand Verbiest，1623年—1688年）为代表的宗教人物给中国带来了许多西方科学特别是数学和天文学知识。今天回顾当年，人们自然会问：为何中国没有象意大利那样出现“文艺复兴”呢？

这些问题，我们只好去问老祖宗了。