

广义 Lorenz 系统族

陈关荣

香港城市大学

eegchen@cityu.edu.hk

2020-6-20

本文简要介绍广义 Lorenz 系统族。它包括经典的 Lorenz 系统以及 Chen 系统作为两个特别的情形，而在这两个系统之间存在着无穷多个相关但不拓扑等价的混沌系统。

关键词：Lorenz 系统，Chen 系统，Lü 系统，广义 Lorenz 系统，广义 Lorenz 标准型

1. Chen 系统

发现于 1963 年的著名 Lorenz 系统 [1] 可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cx - xz - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c 是实参数。当 $a = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 28$ 时系统处于混沌状态，如图 1 (a) 所示。

这个经典 Lorenz 系统在混沌理论、分叉分析及混沌控制与同步领域被广泛研究 [2-4]。在随后的三十多年里，人们一直在思索：Lorenz 系统是否为一个被幸运地发现的孤例，还是存在其它别的密切相关的同类型混沌系统？本文报告一些新近发现和研究进展。

首先回顾一下历史。Chen 于 1999 年在混沌系统的反控制（或称为混沌化）[5,6] 的研究中发现了一个新的系统 [7]，被称为 Chen 系统 [8,9]。这个新的系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2)$$

其中 a, b, c 是实参数。当 $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ 时，系统处于混沌状态，如图 1(b) 所示。这里采用的反控制，就是在 Lorenz 系统中对动力学特性影响最大的第二个方程的右端加入一个线性控制器

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z .$$

然后，在 Shilnikov 条件 [10] 下来确定其系数 α, β, γ 以保证被控系统是混沌的。最后发现，一个简单的选择是 $\alpha = -a, \beta = c + 1, \gamma = 0$ ，从而得到系统 (2)。

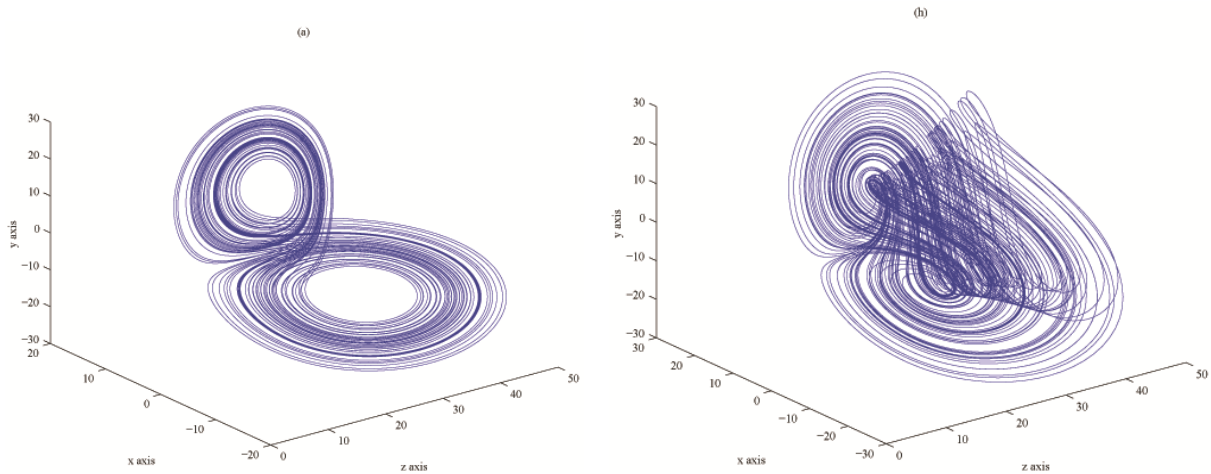


图 1 两个系统的相图：(a) Lorenz 吸引子；(b) Chen 吸引子 [4]

Chen 系统 (2) 看上去与 Lorenz 系统 (1) 非常相似。这是很自然的，因为系统 (2) 是从系统 (1) 演变而来的，因而不但结构上差不多，许多特性一定也是密切相关甚至是相同的。

既然如此，那么 Chen 系统 (2) 有什么新意吗？或者说，它有值得研究的价值吗？

要回答这个问题，当然就要从非线性动力学的角度来看 Chen 系统与 Lorenz 系统有什么不一样的地方。首先要弄清楚的是，这两个系统等价吗？

在动力系统理论中，两个自治系统光滑等价当且仅当存在一个系统变量的微分同胚 (diffeomorphism) 变换 $f(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ ，把一个系统 (x, y, z) 变换成另一个系统 (u, v, w) 。这时，两个系统除了结构形式看上去不一样之外，它们的动力学性质没有任何本质上的区别，因而可以认为其实是同一个系统。不过已经证明 [11]，Chen 系统 (2) 和 Lorenz 系统 (1) 不是光滑等价的。

这里需要注意，在对自治系统的拓扑变换研究中，时间变量 $t \in [0, \infty)$ 是不作变换的，特别是不作反转变换 $t \rightarrow \tau = -t$ 的。不然，很多问题会变得毫无意义。例如，一个稳定的系统，其解收敛于零，就会变成不稳定，其解发散到无穷，因而无从研究（例如，前者有有界 ω -极限不变集而后者没有，甚至不能定义）。

当然，我们也可以尝试跳出自治系统的框架来研究上述问题，作适当的变量变换并作时间反转变换 $t \rightarrow \tau = -t$ ，看看会有什么新发现？我们来看一个具体例子 [12]。

在 Lorenz 系统 (1) 中取 $a = 0.4, b = -1.4, c = -0.4$ ，我们得到确定的无参数系统

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.4(y - x), \\ \dot{y} = -1.4x - xz - y, \\ \dot{z} = xy + 0.4z. \end{cases} \quad (3)$$

类似地，在 Chen 系统 (2) 中取 $a = -0.4$, $b = 0.4$, $c = 1.0$ ，我们得到

$$\begin{cases} \dot{x} = -0.4(y - x), \\ \dot{y} = 1.4x - xz + y, \\ \dot{z} = xy - 0.4z. \end{cases} \quad (4)$$

然后，在系统 (3) 中令 $t \rightarrow +\infty$ 但在系统 (4) 中令时间变量 $t \rightarrow -\infty$ 。这时可以发现，两个系统的解都趋向于同一个有界极限集，并且这个极限集是一个混沌吸引子，如图 2 所示。

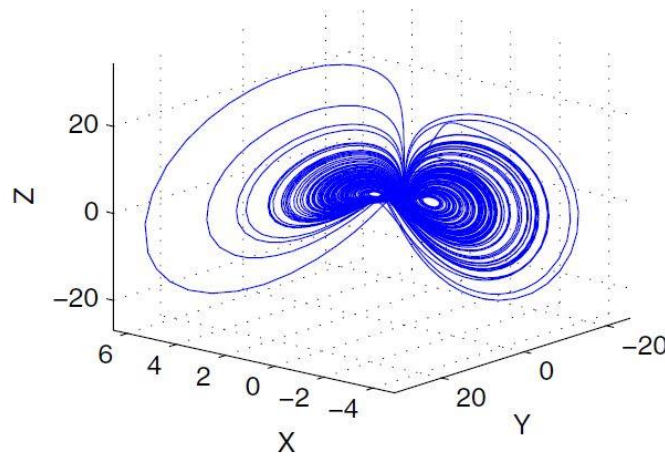
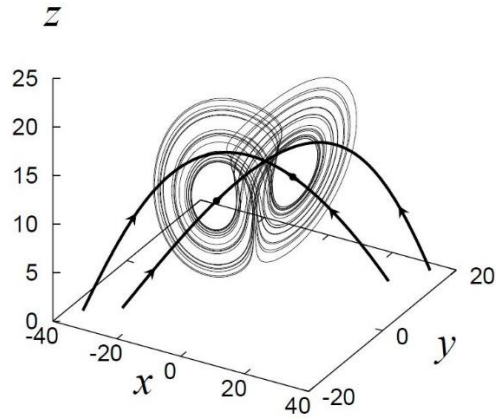


图 2 系统 (3) 和 (4) 的极限集 (混沌吸引子) [12]

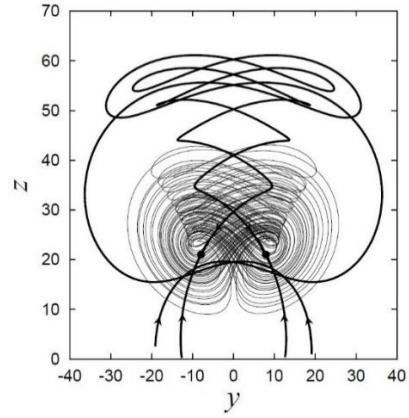
这个例子表明两个系统在相反时间极限处“握手”。这一方面揭示了两者的内在联系，另一方面也说明了两者是不一样的：如果在 Lorenz 系统 (1) 和任何一个与它等价的系统中分别令 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ ，容易验证两个极限大相径庭（一个收敛，另一个发散）。

两个不等价的系统自然有不等价的动力学行为。但是，Chen 系统 (2) 和 Lorenz 系统 (1) 毕竟有上述联系。于是，接下来的一个问题就是：它们有什么不同的动力学行为吗？或者说，有必要把两个系统区别开来加以研究吗？

首先，从图 1 (a)-(b) 中的两个混沌吸引子明显看出，Chen 吸引子比 Lorenz 吸引子复杂得多。事实上，前者比后者的各种混沌和分叉特性甚至多稳定性都要复杂得多，如图 3 所示它们的稳定流形 [9]、图 4 所示它们的正反向不变集 [13] 以及图 5 所示它们的拓扑叶状 (foliation) 结构 [14]。

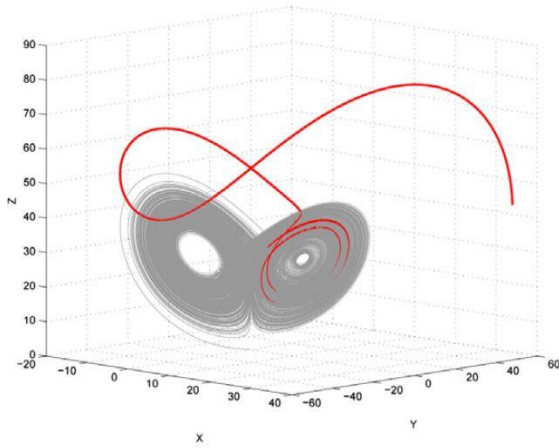


(a) Lorenz 系统

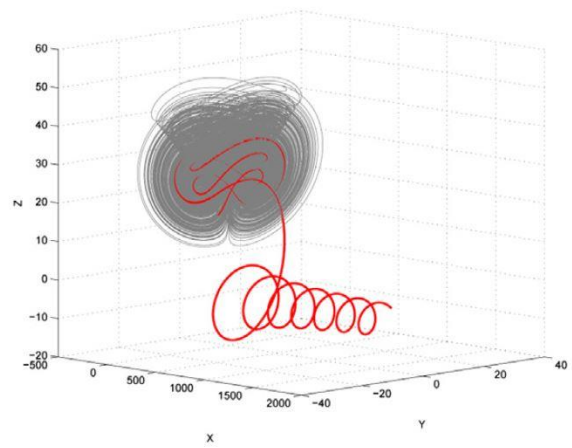


(b) Chen 系统

图 3 两系统的稳定流形 [9]

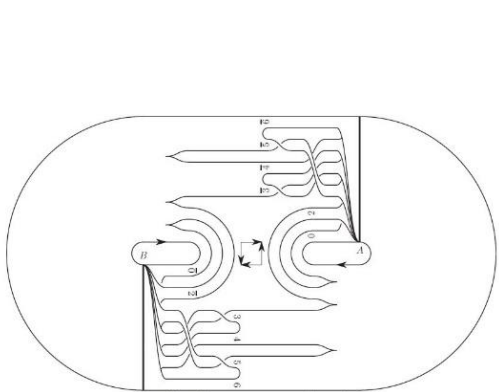


(a) Lorenz 系统

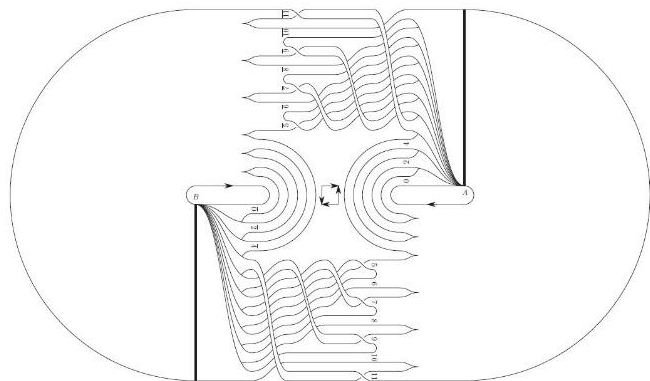


(b) Chen 系统

图 4 两系统的正向反向不变集 (灰色为正向不变集合 $t \rightarrow \infty$; 红色为反向不变集合 $t \rightarrow -\infty$) [13]



(a) Lorenz 系统



(b) Chen 系统

图 5 两系统的拓扑叶状 (foliation) 结构 [14]

其次, Lorenz 系统是全局最终有界的, 即不管从什么初始点开始, 系统的解轨道最终都落入由下面的球面界定的区域里 [15]:

$$x^2 + y^2 + (z - a - c)^2 = \frac{b^2(a+c)^2}{4(b-1)},$$

其中 $a > 0, b > 1, c > 0$ 。也就是说, Lorenz 系统所有混沌解的轨道最终都落入球面内部并且不再离开。但是, 对 Chen 系统却尚未能找到类似的球面解析表达式, 使得严格的理论证明变得非常复杂和困难。问题出在它们第二个方程中符号相反的两项: $-y$ 和 $+cy$, 后者具有发散性, 给技术处理带来很多麻烦。但是, Chen 系统的全局最终有界性还是可以证明的, 只是条件和手段不太一样。例如, 对参数 $a \geq b + c, b > 0, c > 0$, 可以通过构造复合李雅谱诺夫函数来证明 Chen 系统的全局有界性 [16]。在略为不同的 a, b, c 参数条件下, 文献中关于两个系统还有其他一些全局有界性结果。

进一步, 我们来看看两个系统的耗散性。容易验证, Lorenz 系统 (1) 的散度是 $\text{div}(L) = -(a + b + 1)$, 在 $a + b > -1$ 条件下它总是负值, 与 c 无关。因为混沌的 Lorenz 系统有 $a, b > 0$, 这条件自然满足从而系统是全局耗散的。但 Chen 系统 (2) 的散度是 $\text{div}(C) = -(a + b - c)$, 因此系统仅在平面 $a + b = c$ 的一侧是耗散的, 由 c 决定。

再来看看分叉。Lorenz 系统 (1) 的一个关键分叉参数是 [2]

$$c_0 = (a + b + 3)/(a - b - 1),$$

而 Chen 系统 (2) 的相应分叉参数是 [17]

$$c_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{17a^2 - 6ab + b^2} - 3a + b).$$

可以验证 [18], 两系统的 Hopf 分叉曲面分别落在相反的参数区域:

$$\text{Lorenz 系统: } c_0 > a + b,$$

$$\text{Chen 系统: } c_0 < a + b.$$

接下来, 我们看两个系统的李雅谱诺夫维数。Lorenz 系统 (1) 的李雅谱诺夫维数是 [19]

$$\dim_L K = 3 - \frac{2(a+b+1)}{a+1+\sqrt{(a-1)^2+4ac}}.$$

但是, Chen 系统 (2) 的李雅谱诺夫维数公式, 目前还是一个未解决的公开问题。

再来比较一下两个系统的独立参数。对 Chen 系统 (2) 作如下的变量及时间变换 [18]

$$u = \frac{x}{b}, \quad v = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{z}{b}, \quad \tau = bt, \quad (5)$$

可以把 Chen 系统 (2) 变形为

$$\begin{cases} \dot{u} = \alpha(v - u), \\ \dot{v} = (\gamma - \alpha)u - uw + \gamma v, \\ \dot{w} = uv - w, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\alpha = a/b$, $\gamma = c/b$, 从而 b 消失了。这表明 Chen 系统本质上只有 2 个独立参数。比 Lorenz 系统少了一个独立参数但却有相同甚至更为复杂的混沌和分叉等动力学行为, 显示了 Chen 系统在动力分析中有某种优越性, 也从另一个侧面看出两系统本质上的差异。

最后来看看两个系统的物理解释。Lorenz 系统 (1) 的物理背景是熟知的, 它是描述热对流动力系统的一个简化模型, 其中 x 描述垂直方向流体速度, y 描述流体温度, z 描述温度变化梯度, a 是 Prandtl 常数, b 是比例常数, c 是 Rayleigh 数 [1,2]。生成 Chen 系统的反控制输入是

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z = -\alpha x + (c + 1)y + 0z,$$

其第一项加入负的驱动量, 而第二项加入正的热通量。第一项调节了 x 的流速, 而第二项则更为关键, 它把 Lorenz 系统原来的负热通量 $-y$ 变成正热通量 $+cy$, 起了一种正向剪切作用, 令自由对流变成了强迫对流。这两个新项的配合, 产生了吸引子沿垂直方向迅速上升下降的激烈运动 (可比较 Lorenz 吸引子图 1(a) 和 Chen 吸引子图 1(b)) [20]。

值得指出的是, 对 Chen 系统 (2) 的研究, 其意义远远超出发现这个系统本身。它引出了广义 Lorenz 系统族、许多 Lorenz-like 系统 [21] 如 T-系统 [22], 以及一些新的研究问题和方法 [13]。下面进一步讨论广义 Lorenz 系统族及其规范式这个最为密切相关的内容。

2. 广义 Lorenz 系统族和规范式

首先回顾 Celikovsky 和 Vanecek [23] 关于 Lorenz 系统引进的标准型, 它把系统中的线性和非线性两部份分开:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (7)$$

他们指出, Lorenz 系统 (1) 满足 $a_{12}a_{21} > 0$ 。容易验证, Chen 系统 (2) 满足 $a_{12}a_{21} < 0$ 。在这个意义下, 两个系统是对偶的。

2002 年, Lü 和 Chen [24] 发现了一个混沌系统, 称为 Lü 系统, 它满足 $a_{12}a_{21} = 0$, 代表了在 Lorenz 系统和 Chen 系统之间的过渡:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (8)$$

当 $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$ 时, Lü 系统的混沌吸引子如图 6 所示。

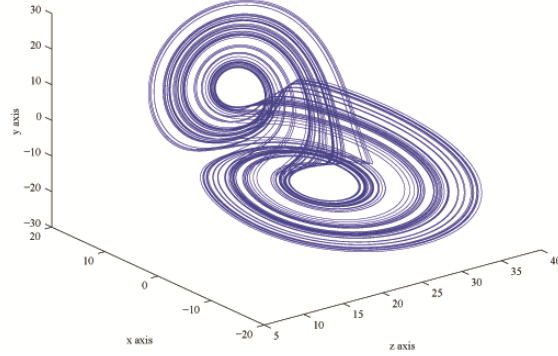


图 6 Lü 吸引子 [23]

同年, Lü 等人 [25] 构造了一个“统一系统”, 作为 Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统之间的光滑连接和过渡:

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} = xy - \frac{1}{3}(\alpha + 8)z, \end{cases} \quad (9)$$

其中 α 是实参数。可以通过仿真验证, 对于任意的 $\alpha \in [0, 1]$, 系统都处于混沌状态。

这个统一系统本质上是 Lorenz 系统和 Chen 系统的凸组合。然而, 它代表了由中间无穷多个混沌系统组成的整个族, 而 Lorenz 系统和 Chen 系统是它的两个极端: 当 $\alpha = 0$ 时, 它是 Lorenz 系统; 当 $\alpha = 1$ 时, 它是 Chen 系统; 当 α 在 0 与 1 之间变化时, 所有的系统都是混沌的。

至此, 容易意识到, Lorenz 系统并不孤立, 应该存在着一大类与之相关的混沌系统。作为另一个例子, 后来 Yang 和 Chen [26] 还构造了如下一个系统, 称为 Yang 系统 [27]:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = cx - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (10)$$

当 $a = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 16$ 时, 这个系统的混沌吸引子如图 7 所示。

如果在 (7) 里看 $a_{11}a_{22}$ 而不是看 $a_{12}a_{21}$ 的话, Lorenz 系统 (1) 满足 $a_{11}a_{22} > 0$, Chen 系统 (2) 满足 $a_{11}a_{22} < 0$, 系统 (10) 满足 $a_{11}a_{22} = 0$ 。在这个意义下, Chen 系统和 Lorenz 系统也是对偶的。

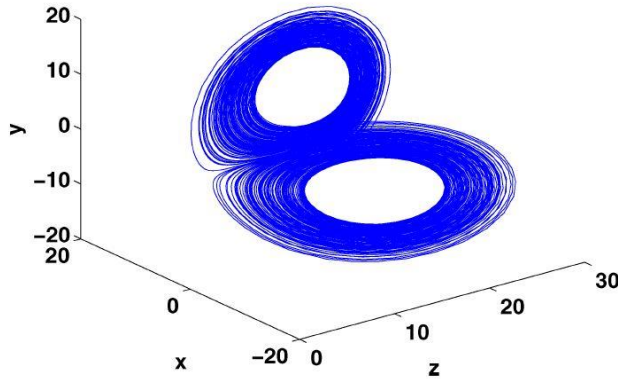


图7 Yang 吸引子 [26]

沿着这个方向的思路让 Celikovskiy 和 Chen [28] 归纳出了广义 Lorenz 系统族 (GLS):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (11)$$

其中 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, 矩阵 A 有实的特征根, 满足 Shilnikov 条件: $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$ 。容易验证, Lorenz 系统、Chen 系统、Lü 系统和 Yang 系统都属于这个 GLS 系统族。GLS 称为是非平凡的, 如果它至少有一个解不趋于 0 或者无穷或者极限环。

随后, 他们又进一步把广义 Lorenz 系统族推广到广义 Lorenz 规范式 (GLCF) [29]:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} z + (\mu z) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \tau & 0 \end{bmatrix} z, \quad (12)$$

其中 $z = [z_1, z_2, z_3]^T$, $\mu = [1, -1, 0]$, $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$, 参数 $\tau \in R$ 。他们证明了, 存在一个非奇异单参数的线性坐标变换 $z = T_\tau x$, 把非平凡的 GLS 转化成 GLCF, 其中要求参数 $\tau > -1$ 。

接下来, 他们考虑 $\tau \leq -1$ 的情形。这时 GLS (11) 并无定义, 因此需要稍作调整。

首先, 对 $\tau < -1$ 的情形, 他们引进了下面的双曲形广义 Lorenz 系统 (HGLS) [30]:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (13)$$

其中 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$ 。HGLS (13) 称为是非平凡的, 如果它至少有一个解不趋于 0 或者无穷或者极限环。

虽然 HGLS (13) 和 GLS (11) 的差别仅在第二个矩阵中一个“1”的正负号, 但是这个差别很重要, 令它们不能归纳到同一种规范形式之中。其中, GLS (11) 的第二个矩阵具有特征根 $\{0, \pm j\}$ 而 HGLS (13) 相应的特征根为 $\{0, \pm 1\}$; 在这个意义下, (13) 称为是双曲形的。

至此，带有参数 $\tau \neq -1$ 的 GLS (11) 和 HGLS (13) 可以统一如下：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sgn}(\tau + 1) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (14)$$

其中 $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$ 。

最后来考虑 $\tau = -1$ 的情形。这时 GLCF (12) 可以从另一种形式来定义 [29]，并且它等价于 Shimidzu-Morioka 系统 [31]：

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = y, \\ \frac{dy}{d\theta} = x(1 - z) - \alpha y, \\ \frac{dz}{d\theta} = -\beta z + x^2, \end{cases}$$

其中 $\theta = t\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}$, $\alpha = -\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}$, $\beta = \lambda_3/\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}$ 。

上面把所有参数综合起来的 GLCF 本质上是按照系统的代数结构来定义的，而前面所有提到过的混沌系统都是它的特例。它只有一个参数，满足 $-\infty < \tau < +\infty$ 。在这个 GLCF 中，Lorenz 系统满足 $0 < \tau < +\infty$ ，Lü 系统满足 $\tau = 0$ ，Chen 系统满足 $-1 < \tau < 0$ ，Shimidzu-Morioka 系统满足 $\tau = -1$ ，双曲形广义 Lorenz 系统 HGLS 满足 $-\infty < \tau < -1$ 。这也从另一个角度反映了，Lorenz 系统、Lü 系统和 Chen 系统彼此并不等价。另外可以证明，只要满足 $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$ ，这个 GLCF 是 Shilnikov 意义下混沌的 [32]。

广义 Lorenz 规范式 GLCF 可以用来对与经典 Lorenz 系统相关的一大族不同的混沌系统进行分类，如表 1 所示。GLCF 的详细总结和动力学分析可以在 [4] 中找到。

表 1: GLCF 等价系统及其分类

GLCF	等价系统和一些特殊系统
$\tau \in (-\infty, -1)$	双曲形广义 Lorenz 系统 HGLS
$\tau = -1$	Shimidzu-Morioka 系统
$\tau \in (-1, 0)$	广义 Lorenz 系统 GLS 且 $a_{12}a_{21} < 0$; Chen 系统
$\tau = 0$	广义 Lorenz 系统 GLS 且 $a_{12}a_{21} = 0$; Lü 系统
$\tau \in (0, \infty)$	广义 Lorenz 系统 GLS 且 $a_{12}a_{21} > 0$; Lorenz 系统

沿着相同的路线, Yang 等人 [33] 引进了完全 Lorenz 标准型 (CLCF):

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} z + \mu z \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sign}(\tau) \\ 0 & 0 & \text{sign}(\tau) \\ -a_{12}^2 \Delta - \xi & \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 $z = [z_1, z_2, z_3]^T$, $\mu = [1, -1, 0]$, $\xi = a_{12}^2 \sqrt{\Delta} (a_{22} - \lambda_1)$, $\Delta = [\text{tr}(A)]^2 - 4 \det(A)$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 。这个标准型由 τ 和 ξ 两个参数来刻画, 包含了 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统, 及其称为共轭系统的情形。CLCF (15) 称为是非平凡的, 如果它至少有一个解不趋于 0 或者无穷或者极限环。

类似地, CLCF (15) 也可以用来对与 Lorenz 系统 (1) 相关的一大族不同的混沌系统进行分类, 如表 2 所示。因为 $\tau = 0$ 的情形是平凡的, 故此没有列出。

表 2: CLCF 等价系统及其分类

τ	ξ	等价系统	特殊系统
$\tau < 0$	$\xi \in (-\infty, -a_{12}^2 \Delta)$	GLS	
	$\xi = -a_{12}^2 \Delta$		
	$\xi \in (-a_{12}^2 \Delta, 0)$		Lorenz 系统
	$\xi = 0$		Lü 系统
	$\xi \in (0, +\infty)$		Chen 系统
$\tau > 0$	$\xi \in (-\infty, -a_{12}^2 \Delta)$	CLTS	共轭 Chen 系统
	$\xi = -a_{12}^2 \Delta$		共轭 Lü 系统
	$\xi \in (-a_{12}^2 \Delta, 0)$		共轭 Lorenz 系统
	$\xi = 0$		
	$\xi \in (0, +\infty)$		

参考文献

- [1] Lorenz, E. N., “Deterministic nonperiodic flow,” *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141, 1963.
- [2] Sparrow, C., *The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos, and Strange Attractor*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] Chen, G., X. Dong, *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications*, World Scientific Pub. Co., Singapore, 1998; 2nd print, 2014,
- [4] 陈关荣、吕金虎, *Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步*, 科学出版社, 北京, 2003.
- [5] 陈关荣、汪小帆, *动力系统的混沌化*, 上海交通大学出版社, 上海, 2006.
- [6] 禹思敏、吕金虎、陈关荣, *动力系统反控制: 方法及其应用*, 科学出版社, 北京, 2013.
- [7] Chen, G., T. Ueta, “Yet another chaotic attractor,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 9, 1465-1466, 1999.
- [8] 汪小帆, “Chen's 吸引子: 一个新的混沌吸引子”, *控制理论与应用*, 16, 719, 1999.
- [9] Ueta, T., G. Chen, “Bifurcation analysis of Chen's equation,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 10, 1917-1931, 2000.
- [10] Shilnikov, L. P., “A contribution to the problem of the structure of an extended neighbourhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type,” *Math. USSR Sbornik*, 10, 91-102, 1970.
- [11] Hou, Z., N. Kang, X. Kong, G. Chen, G. Yan, “On the nonequivalence of Lorenz system and Chen system,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 20, 557-560, 2010.
- [12] Sprott, J. C., X. Wang, G. Chen, “When two dual chaotic systems shake hands?” *Int. J. Bifur. Chaos*, 24, 1450086, 2014.
- [13] Leonov, G. A., N. V. Kuznetsov, “On differences and similarities in the analysis of Lorenz, Chen, and Lü systems,” *Appl. Math. Comput.*, 256, 334-343, 2015.
- [14] Rosalie, M. “Templates of two foliated attractors – Lorenz and Chen systems,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 26, 1650037, 2016.
- [15] Leonov, G. A., A. Bunin, N. Kokschi, “Attractor localization of the Lorenz system,” *Z. Angew. Math. Mech.*, 67, 649-656, 1987.
- [16] Barboza, R., G. Chen, “On the global boundedness of the Chen system,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 21, 3373-3385, 2011.
- [17] Lü, J. H., T. S. Zhou, G. Chen, S. C. Zhang, “Local bifurcations of the Chen system,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 12, 2257-2270, 2002.
- [18] Barboza, R., “On Lorenz and Chen systems,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 28, 1850018, 2018.
- [19] Leonov, G. A., “Lyapunov functions in the attractors dimension theory,” *J. Appl. Math. Mech.*, 76, 129-141, 2012.
- [20] Sooraksa, P., G. Chen, “Chen system as a controlled weather model – Physical principle, engineering design and real applications,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 28, 1830009, 2018.
- [21] Wang, X., G. Chen, “A gallery of Lorenz-like and Chen-like attractors,” *Int. J. Bifur. Chaos*,

23, 1330011, 2013.

- [22] Tigana, G., D. Opriş, “Analysis of a 3D chaotic system,” *Chaos, Solitons, Fractals*, 36, 1315-1319, 2008.
- [23] Celikovskiy, S., A. Vanecek, “Bilinear systems and chaos,” *Kybernetika*, 30, 403-424, 1994.
- [24] Lü, J. H., G. Chen, “A new chaotic attractor coined,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 12, 659-661, 2002.
- [25] Lü, J. H., G. Chen, D. Cheng, S. Celikovskiy, “Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 12, 2917-2926, 2002.
- [26] Yang, Q. G., G. Chen, “A chaotic system with one saddle and two stable node-foci,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 18, 1393-1414, 2008.
- [27] 廖晓昕, Lorenz 混沌族中若干数学问题新研究, 华中科技大学出版社, 武汉, 2017.
- [28] Celikovskiy, S., G. Chen, “On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 12, 1789-1812, 2002.
- [29] Celikovskiy, S., G. Chen, “On the generalized Lorenz canonical form,” *Chaos, Solitons Fractals*, 2004.
- [30] Celikovskiy, S., G. Chen, “Hyperbolic-type of generalized Lorenz chaotic system and its canonical form,” *Proc. 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, pp. 203-207, July 21-26, 2002.
- [31] Shimizu, T., N. Morioka, “On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model,” *Phys. Lett. A* 76, 201-204, 1976.
- [32] Zhou, T. S., G. Chen, S. Celikovskiy, “Si'lnikov chaos in the generalized Lorenz canonical form of dynamics systems,” *Nonlin. Dynam.*, 39, 319-334, 2005.
- [33] Yang, Q. G., G. Chen, T. S. Zhou, “A unified Lorenz-type system and its canonical form,” *Int. J. Bifur. Chaos*, 16, 2855-2871, 2006.