

簡單的七條小橋引出了複雜的網路科學

陳關榮¹

摘要

本文簡略地介紹了網路科學的前世今生。從有趣的哥尼斯堡七橋問題談起，引出了數學圖論的誕生，介紹了隨機圖網路、小世界網路和無標度網路等三個經典代表性複雜網路模型，包括它們的生成機制和基本特性，並談及它們的一些周知的應用。最後，歸納了網路科學的一些重要意義、普適特徵、研究挑戰性和發展前景。希望能引起大眾對網路科學的廣泛關注，特別期望青年科學家們能進行更深入的學習和研究。

關鍵詞：七橋問題、網路科學、隨機圖網路、小世界網路、無標度網路

¹ 香港城市大學電機工程學系講座教授 (通訊作者 / eegchen@cityu.edu.hk)



The Simple Seven-Bridge Problem Led to the Complex Network Science

Guanrong Chen¹

Keywords:

seven-bridge problem,
network science, random-
graph network, small-world
network, scale-free network

Author:

¹ Chair Professor, Department
of Electrical Engineering,
City University of Hong Kong.
(Corresponding Author /
eegchen@cityu.edu.hk)

Article received December 21,
2022; Accepted January 11,
2023.

ABSTRACT

This essay briefly introduces the notion of network science, from the past to the present. Starting from the interesting seven-bridge problem of Königsberg, which led to the forming of the modern mathematical graph theory, the article introduces three typical and representative complex network models, including random-graph networks, small-world networks and scale-free networks, as well as their generation mechanism and basic properties, with some well-known application examples. Finally, some essential significance, universal features, research challenges and development prospects of network science are summarized. It is hoped that the public will pay more attention to network science and particularly young scientists could carry out more in-depth studies and research on the subject.

一、從哥尼斯堡七橋問題說起

歐洲波羅的海東南沿岸的桑比亞半島南部有一座小巧玲瓏的古城堡哥尼斯堡（Königsberg），在歷史上先後是條頓騎士團國、普魯士公國和東普魯士國（East Prussia）的首府，在二戰之後歸屬於俄羅斯並被改名為加里寧格勒（Kaliningrad）（見圖 1）。

哥尼斯堡歷史不長，地域不大，但地靈人傑，名人眾多。在哥尼斯堡出生長大的知名人物至少有「一、二、三」，即一位哲學家康德（Kant）、二位物理學家（基爾霍夫 [Kirchhoff] 和索末菲 [Sommerfeld]）和三位數學家（哥德巴赫 [Goldbach]、希爾伯特 [Hilbert] 和閔可夫斯基 [Minkowski]），還未計及化學、文學、歷史、政治、宗教、音樂、藝術等領域的名家（陳關榮，2021）。

流經哥尼斯堡市區的小河“Pregel”有一個小島和七座小橋（見圖 2）。在 18 世紀，當地居民聊天時會經常討論，是否可以從河畔某一個地點出發，不重複也不遺漏地走過

所有七條小橋，最後回到起點？居民們經多番努力都沒找到這個貌似簡單的畫圖遊戲的答案。

於是，這個七橋問題便在民間流傳開來，以至引起了身在俄國聖彼得堡的瑞士裔年輕數學家歐拉（Leonhard Paul Euler，1707–1783）的興趣，讓他認真地去思考這個路徑遊戲問題。

當年，歐拉大概是這樣琢磨的：假定你在圖 2 上沿著某條路線往前走。當你走到任意一個地點（圖 2 裡的 A、B、C、D）時，如果它不是終點，那麼你得穿過它然後繼續往前走。於是，這個地點便有兩條連接路徑：一條進來、一條出去。你就這樣繼續往前走。你有可能再也不回到這個地點，但也可能還會回來。如果你走回來而這個地方又不是終點的話，你還得再次離開它，這樣它就有四條連接路徑了。如此類推，所有不是終點的地方必須有偶數條連接路徑。這裡，重複走過某些地點是允許的，只是不允許重複走過任何一條連接路徑，因為每條路徑都穿過一



圖 1
哥尼斯堡

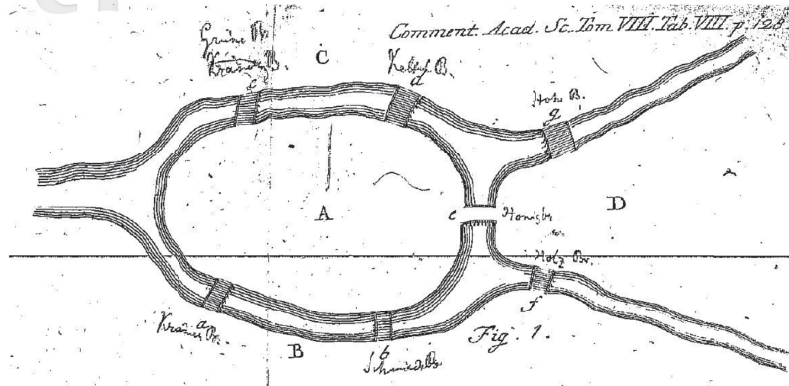


圖 2

哥尼斯堡城中河面上七條小橋

註：出自“Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,” by L. Euler, 1741, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8, p. 128.

條小橋。最後，假定你走到了終點，按要求的必須是起點，所以終點與起點重合，這個特殊的地點也同樣有兩條連接路徑。

至此，歐拉找到了七橋問題是否有解的答案：如果有解的話，圖 2 中的所有地點（A、B、C、D）都必須有偶數條連接路徑。但是，從圖看出，所有地點（A、B、C、D）都與奇數條橋相通，即有奇數條連接路徑。實際上，只要有一個地點與奇數條橋相通，問題就是沒有解的：不管你從哪裡出發，你都不可能不重複也不遺漏地把七條橋全部走一遍，最後回到出發點。

1735 年 8 月 26 日，歐拉向俄羅斯聖彼得堡科學院作了一個學術報告，從數學上論證了哥尼斯堡七橋問題是沒有解的。後來歐拉以拉丁文正式發表了論文〈關於位置幾何問題的解法〉（*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*）（Euler, 1741），詳細討論了七橋問題並作了一些推廣。該論文被認為是數學圖論、拓撲學和網路科學的發端。

後來，歐拉和其他一些數學家分別考慮了一般多條橋的各種地圖，並把它們抽象為

數學圖來加以研究。所謂數學圖就是只有節點和連邊而且它們是沒有大小長短和物理意義的圖，如圖 3 的三幅圖所示，其中為了視覺美觀添加了紅色。在圖論中，一幅有限規模的圖，不管它有多少個節點（圖 2 中的地點）和多少條連邊（圖 2 中的連接路徑），也不管你從哪個節點起步，如果總存在一條連續的路線讓你走遍所有的連邊，不重複也不遺漏，最後還能回到起點，那麼這幅圖就稱為是「歐拉圖」。因此，把哥尼斯堡七橋地圖（圖 2）畫成的數學圖不屬於歐拉圖。

就這樣，從歐拉解決七橋問題開始，數學家們逐步建立起了數學圖論，並把歐拉尊為「圖論之父」。

二、三個基本網路模型

歷史很快便走過了二百多年。

1959 年，匈牙利數學家埃爾德什（Paul Erdős）和倫伊（Alfréd Rényi）提出了一個隨機圖模型（汪小帆等人，2012）：從有限個孤立節點開始，把所有可能的節點對（即兩個不同的節點）分別以相同的概率用一條連

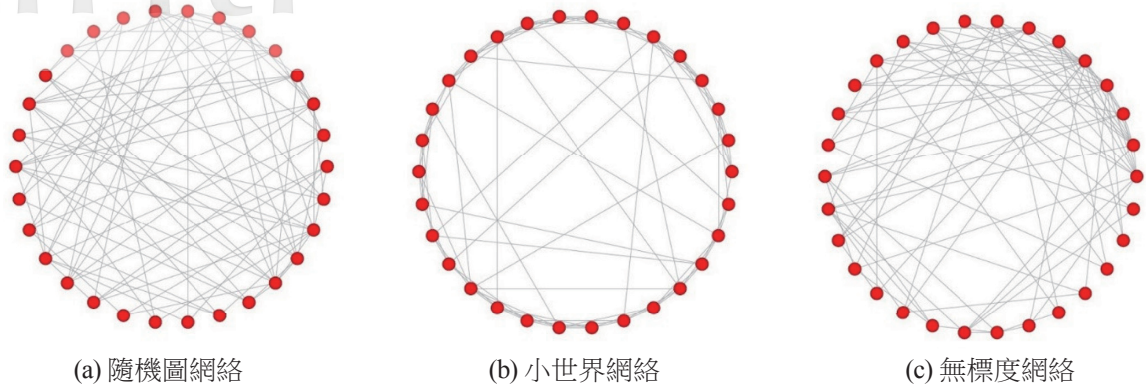


圖 3
三個基本網路模型（示意圖）

註：作者自行繪製。

邊連接起來，並且整個過程的操作不重複也不遺漏，最後便得到一個數學圖（也稱為網路）。因為連接的概率小於 1，有些節點對之間並沒有建立連邊。這個概率越小，沒有連邊的節點對就越多。但不管這個概率是大還是小，所產生的圖的連接分布是比較均勻的。這是因為對所有節點和連邊的操作都是一樣的，沒有特別偏袒某些節點或者某些連邊，因此所有節點的連邊數（稱為節點的「度」）大體上是相等的。當然會有差別，但相差不會太大。也就是說，生成的圖看起來是比較均勻的（見圖 3 (a)）。數學上，這類隨機圖的節點度服從泊松（Poisson）分布。

1998 年，美國康奈爾大學（Cornell University）應用數學博士研究生瓦茨（Duncan J. Watts）在導師斯托加茨（Steven H. Strogatz）指導下，遵循隨機網路的基本思想，提出了一個「小世界網路模型」，發表在《自然》（*Nature*）雜誌上，被稱為 WS 小世界網路模型（Watts–Strogatz small-world network model）（汪小帆等人，2012）。該模型在具有最近鄰接邊的規則網路（例如環狀網路）的基礎上，把所有可能的節點對按某種規律

以相同的概率增加或刪除連邊（見圖 3 (b)）。由於隨機性，必然出現一些遠端連邊，把兩個相離較遠的節點連接起來。在圖論中，兩個相連節點之間的連線長度定義為 1，與它們在所畫的圖形中放置的遠近無關。任意兩節點之間的「距離」定義為它們之間最短可能路徑中通過其它一些節點的連邊的總數目。上面所說的遠端連邊就把網路變成了一個小世界，也就是說任意兩個節點之間的距離都變得相對的短。這類網路和隨機圖類似，看上去還是相對比較均勻的，網路節點度近似服從泊松分布。小世界網路中任意兩節點相離不遠，從而整個網路節點之間的平均距離也比較短。因此，小世界網路模型的意義是顯而易見的，例如它把人群和技術網路中的社會聯絡、資訊交流和信號傳輸等功能變得高效快捷。

對小世界關係的生活經驗和哲學認知古來有之。在中國有唐詩「海內存知己，天涯若比鄰」為證。在 1960 年代，美國哈佛大學的社會心理學家米爾格拉姆（Stanley Milgram）通過社會調查發現任意兩個人之間平均只需要通過五個熟人就能聯繫起來，即

「六度分離」(six degrees of separation) 現象。瓦茨於 2003 年 8 月在《科學》(Science) 雜誌上報導了他組織來自 166 個國家和地區的 60,000 多名志願者參加的電郵聯絡遊戲，發現大家收到的電子郵件都通過五至七個中間人的轉送，和六度分離現象非常吻合。Facebook 資料團隊於 2011 年 11 月 21 日宣布，根據他們對 7.21 億活躍用戶和 690 億好友連接的調查，任何人之間的聯絡數字僅為 4.74；而到了 2016 年，他們的報告表明，這個平均距離僅為 3.57，表明世界變得越來越小。儘管人們對「小世界」現象早有各種各樣的經驗，對其認知並不新奇，但無論如何 WS 小世界網路給出了第一個從科學角度定性定量地描述小世界關係的數學模型。

1999 年，美國聖母大學 (University of Notre Dame) 物理學導師巴拉巴西 (Albert-László Barabási) 和女博士研究生阿伯特 (Réka Albert) 一起，提出了一個基於增長和帶偏好性隨機連接的「無標度網路模型」，發表在《科學》雜誌上，簡稱為 BA 模型 (Barabási-Albert model) (汪小帆等人，2012)。像前輩數學家埃爾德什和倫伊一樣，這師生倆都是匈牙利人。該模型在建立過程中陸續有新節點加入，從而不斷地增長擴大。新加入的節點按照正比於各個老節點的度的概率和它們分別相連，具有不同的偏好性。由於隨機性，新節點和一些老節點並不建立新的連接。但是，由於這隨機性的概率正比於老節點的度，新節點連接到節點度略大即連邊數稍多的老節點的可能性就較高，從而讓該老節點的度變大，並且在過程中變得越來越大。最後，網路的度分布出現「富者越富、窮者越窮」的局面，少數節點有特別大的度，而絕大多數節點只有相對較低的度，相差可能很遠 (見圖 3 (c))。這類網路雖然也根據概率

來建立連接，因而具有隨機性，但它們和上面說的隨機網路截然相反，其連接結構是很不均勻的。數學上，它們的節點度服從冪律分布。由於節點冪律分布是由上述網路的生成機制決定的，與網路規模大小無關，因此這類網路稱為「無標度網路」。這個模型可以用來描述非常多的現實世界網路。容易想像，社會上明星有很多粉絲而普通人只有很少；互聯網 (Internet) 上 Google 和百度等網站的訪問人次很多而普通個人網站卻很少人光顧；「的、和、是」等少數文字在句子裡出現的頻數很高而大部分普通文字在文獻裡的使用並不太多，等等。

無標度網路模型在自然界和現實生活中如此普遍地存在，為何這麼晚才被科學家們注意到呢？其實不然。早在 1965 年，也就是埃爾德什和倫伊建立隨機圖模型不久，英國裔的美國科學史及計量學家普萊斯 (Derek de Solla Price) 基於對科學論文的引文網路所作的許多定量研究，在《科學》雜誌上發表文章〈科學論文網路〉(Networks of scientific papers)，指出了引文網路的入度和出度都符合冪律分布，描繪了無標度網路並提供了一個具體例子 (陳關榮，2022b)。更細緻的「普萊斯模型」(Price model) 發表在 1976 年《美國資訊學會雜誌》(Journal of The American Society for Information Science) 上。受「通才人物」司馬賀 (Herbert A. Simon) (陳關榮，2022a) 冪律分布隨機模型的啟發，普萊斯在這篇論文中引進了一個具體的網路數學模型，用來描述引文網路增長的過程和度分布生成的規律，包括了增長過程及偏好性連接機制。不過，由於在普萊斯那個時代尚未有高速電腦和大型資料庫，特別是還沒有互聯網，科學家們對普萊斯模型不太關注，因而該網路模型並不為人熟識。雖然巴拉巴西

和阿伯特「重新發現」了普萊斯模型，兩者並非全同。BA模型的最大貢獻，是它在千禧之年之後帶起了一波研究網路科學的熱潮，在科學發展進程中功不可沒。

三、網路科學前瞻

網路科學的研究發展到今天，全面覆蓋了幾乎所有的複雜網路，包括互聯網和萬維網（World Wide Web, WWW）、移動通信網路、交通網路、電力網路、社會網路、經濟網路、生態網路、神經網路和各種生物網路，等等。這些看上去各不相同的網路之間，有著許多驚人的相似之處，並且都可以用上面介紹的網路模型來加以刻畫和分析。

長期以來，通信網路、電力網路、生物網路、社會網路和經濟網路等實際網路分別是不同科學各自獨立的研究物件。但是，由於它們的諸多重複共性以及現代科學技術的迅速發展，需要並且可能統一地來研究整個網路科學。首先，網路科學的研究物件是各種看上去互不相同的複雜網路之間的共性以及分析它們的普適方法。網路科學中的研究問題來源於各種實際網路，它所產生的共同概念、方法和理論又可以反過來為各種實際網路的分析與設計提供宏觀指導和具體處置。其次，網路科學把多種學科用統一的網路理論和技術聯絡起來，使得對某一類網路的研究可以為另一類網路的研究提供參考和借鑑。此外，許多複雜網路的問題依靠單個學科難以有效解決，需要多學科的協同努力，而網路科學則提供了一個多學科交互的平臺。一個簡單的例子是，傳染病在社會網路中的傳播，人群資訊、輿情、觀點和謠言等在社會網路中的傳播，電腦病毒在互聯網和移動通信網路上的傳播，電站相繼故障在電網上的傳播，凡此等等不同領域的不同問

題，其實都可以歸結為複雜網路上的傳播動力學，研究局部節點或連邊的行為是如何在全域網路中擴散的。這些研究能夠為人們提供十分有效的推廣策略或防範措施。簡而言之，網路科學的數學理論、計算方法、模擬分析和資料實證都可以為這些問題提供有效的研究和解決手段。

但是，網路科學的研究和應用極具挑戰性。大規模網路系統的複雜性體現在以下幾個方面：首先是結構的複雜性，其連接錯綜複雜而且是動態變化並具有隨機性；其次是節點的複雜性，其動力學行具有異質性和多樣性，甚至出現分岔、混沌等非線性特徵；網路結構與節點系統之間的相互作用，以至網路和網路之間的交互影響，都是不可避免的十分棘手的理論和技術問題。

目前，網路科學研究的主要內容包括：

- （一）發現：揭示和刻畫各種網路的結構的拓撲特性，以及度量和計算這些指標的有效方法；
- （二）建模：建立合適的網路模型以說明人們理解其統計性質的內在意義和產生機理；
- （三）分析：基於單個節點的性質和整個網路的結構特徵去分析和預測網路的演變及行為；
- （四）設計：提出具有理想功能的新型網路和改善已有網路的性能並給出有效的分析和計算方法；
- （五）應用：從網路科學到網路工程的各種各樣的理論和實際應用。

瞻觀未來，方興未艾的網路科學任重道遠、前途無量。這門學科值得大家廣泛關注，更值得青年科學家們致力研究。

參考文獻

- 汪小帆、李翔、陳關榮（2012）。《網路科學導論》。高等教育出版社。
- 陳關榮（2021年12月18日）。〈從哥尼士堡七橋問題談起〉〔微信公眾號〕。《集智

俱樂部》。 <https://mp.weixin.qq.com/s/flgH-2l2fAuTVCF-RnsglNw>

陳關榮 (2022a 年 3 月 12 日)。〈司馬賀之問：學習還是創造？〉〔微信公眾號〕。《集智俱樂部》。 <https://mp.weixin.qq.com/s/h5gvnaU-0LsYDiICtSU49g>

陳關榮 (2022b 年 5 月 22 日)。〈普萊斯和他的定律及模型〉〔微信公眾號〕。《集智俱樂部》。 <https://mp.weixin.qq.com/s/X0vmSVoNwLJo0YqTQM1FvQ>

Euler, L. (1741). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8, 128-140.

YAYAK. (n.d.). *You're Going to Love Kaliningrad*. <https://www.kayak.ie/Kaliningrad.13607.guide>