



欧拉：善良的伟人

“阅读欧拉吧，阅读欧拉吧，他是我们大家的老师。”——拉普拉斯

陈关荣

通常，用“善良”来形容“伟人”的很少，但是用到欧拉身上却非常贴切。



欧拉恒等式

莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler, 1707-1783）出生于瑞士的巴塞尔。像许多天才少年一样，他13岁那年入读巴塞尔大学。他有幸得到了大科学家约翰·伯努利的赏识和指导，17岁获硕士学位，19岁获博士学位。几年以后，恩师伯努利对已是如日中天的青年数学家欧拉说：“我介绍高等分析的时候，它还是个孩子，而现在你正在将它带大成人”。不过那是后话。当时刚出道的欧拉并非一帆风顺，他申请留校当物理学教师没有成功。幸好，伯努利的两个科学家儿子，丹尼尔和尼古拉，那时都在俄国圣彼得堡的皇家科学院工作。经他们推荐，受女皇叶卡捷林娜一世的邀请，20岁的欧拉来到了圣彼得堡，供职俄国科学院。欧拉在那里工作到34岁，然后离开了政治动乱的俄国，加盟德国柏林科学院，在那里工作了25年。欧拉59岁时接受叶卡捷林娜二世的邀请，重返俄国，在圣彼得堡国立大学工作，直至76岁辞世。

欧拉的一生不无坎坷。他生育过13个孩子，但其中8个在襁褓中夭折。欧拉69岁时妻子去世，他次年再婚。还有不幸的是，他28岁时右眼失明，不到60岁时左眼视力严重衰退而后导致失明，致使他生命中最后的12年在完全黑暗中度过。

晚年的欧拉凭着记忆和心算进行数学研究，这期间依然留下了400多篇论文，其工作的艰苦和努力程度可想而知。欧拉去世后，圣彼得堡科学院为了整



印有欧拉肖像的瑞士纸币

理他留下的手稿足足忙碌了近半个世纪。据说，直至欧拉去世后的第 80 个年头，圣彼得堡科学院院报还在发表后人帮他整理出来的论著。今天，不少国家图书馆里保存着《欧拉全集》，共 75 卷，包括 850 多篇论文及 30 多本论著和书稿，其中 380 篇论文及两部名著《无穷小分析引论》和《微积分概论》

是他在德国柏林科学院工作的 25 年间完成。有人统计过，欧拉的论著中，数论、代数、分析约占 40%，几何 18%，物理和力学 28%，天文学 11%，余下的 3% 则涉及航海学和建筑学等。欧拉在 18 岁时发表第一篇论文。由此容易推算，他其后的学术生涯中平均每个月完成不止一篇论文或书籍。数学史上，到目前为止唯一从数量上超过了欧拉的，是传奇式的数学家保罗·埃尔德什 (Paul Erdős, 1913-1996)。他一生发表过 1600 多篇论文。也就是说，20 岁以后的 63 年间他平均每个月发表超过两篇论文。传统的数学家以高质量为标准，而这两位数学大师则是质量与数量都无与伦比。重要的是，每一篇文章都出自其手，没有记录说他们只简单地往别人的文章上加上自己的名字。事实上，那个时代的学术界没有这种风气。

欧拉与阿基米德、牛顿和高斯被列为历史上最伟大的四位数学家。在数学力学中有一大堆以欧拉命名的公式和定理。除了初等平面几何中熟知的欧拉九点共圆定理和多面体欧拉公式之外，让中学生沉迷不舍的“数独”也起源于欧拉的拉丁方。在高等数学中则有好几个欧拉公式和欧拉定理。欧拉创立了拓扑学，其中著名的有欧拉示性数；在数学分析中有欧拉常数、欧拉变换、欧拉-傅里叶公式、欧拉-麦克劳林公式；微分方程理论中有欧拉多角曲线、欧拉齐性函数；在数论中有欧拉函数、欧拉乘积、费马-欧拉定理。今天计算机领域中广泛使用的 RSA 公钥密码算法，正是以欧拉函数为基础。此外，欧拉在数论研究中曾经“重新发现”了中国剩余定理。这个算法也叫孙子定理，出自南北朝时期（公元 420-589 年间）的《孙子算经》。就像火药等诸多发明那样，中国人其实并没有输在起跑线上。只是一千多年后，才由欧拉用现代数学的逻辑语言严格地证明了这个古老的中国数学命题。在力学和变分学中，还有欧拉-拉格朗日方程，及刚体运动中的欧拉角、流体力学中的欧拉方程、弹性力学中的伯努利-欧拉定律，等等。如果说人们在经典数学力学领域里谈论欧拉已经两百多年了，那么在近十多年来兴起的“复杂网络”研究领地里，人们又重新开始关注欧拉，并重新学习埃尔德什。欧拉解决了有趣的哥尼斯堡 (Königsberg) 七桥问题，从而创建了图论，其中有欧拉图（哥尼斯堡七桥却属于半欧拉图）。在数学史上，十八世纪被称为“欧拉时代”。上个世纪五十年代末，埃尔德什

发展了随机图论，一直领衔现代数学图论研究至今，并为复杂网络科学研究提供了许多思想和工具。

欧拉和埃尔德什这两位数学大师在性格方面有许多共同点。他们毫无兴趣于权益往来和饭局社交，却非常喜欢天真活泼的小孩子，虽然欧拉曾经有过多个孩子而埃尔德什终生未娶。欧拉常常把小孩放在膝盖上做自己的数学研究，而埃尔德什则常常和别人的小孩逗乐，甜甜地称他们“epsilon”（小不点）。



埃尔德什和“小不点”（陶哲轩，10岁）

欧拉高风亮节。他一生中在欧洲三百多名学者时有通信。许多回忆说，欧拉在信中总是毫无保留地把自己的数学发现甚至证明细节告诉对方，毕生以助人为乐。一个典型的故事说，1755年8月12日，19岁的大学生拉格朗日给在柏林科学院的欧拉教授写了一封信，说自己解决了半个世纪来没人能解决的等周问题，其中勾画了用分析方法求变分极值的崭新思想。欧拉在9月6日便回了信，称赞拉格朗日的研究成果很有价值，并鼓励他继续完成整个工作。这使年轻的拉格朗日在学术界名声鹊起。后来欧拉又把23岁的拉格朗日推荐到柏林科学院。接着，欧拉还与法国数学家达朗贝尔联名，向德国国王推荐拉格朗日成为了一位“宫廷数学家”。可以说，没有欧拉就没有拉格朗日。故事的背后，说其实欧拉多年来早已潜心探讨这个等周问题并已有答案，然而见到拉格朗日的解法新颖，便丢弃了自己的手稿，满心欢喜地推荐了拉格朗日。结局则是，由于拉格朗日的这篇文章，数学出现了一个新的分支——变分学。那个时代学术界的人都知道欧拉是一位好心人，有求必应，绝对不会嫉妒、更不会占有他人的工作。事实上，只有像欧拉和埃尔德什这些名副其实的“科学家”，把一生奉献给科学与教育事业，才会令世人敬仰。

当时在欧洲的所有数学家都把欧拉看作自己的老师。拉普拉斯说，“他是我们大家的老师”。这并不言过其实。欧拉的确是一位热心的教育家，也是一个教学名师。欧拉和那些不愿意给本科生上课的教授们不同，他不仅亲自为青少年编纂数学课本，撰写通俗科普读物，还经常抽空到大学和中学去讲课。1770年，双目几乎完全失明的欧拉仍然给青年学生们编写了一本《关于代数



印有欧拉肖像的苏联邮票

学的全面指南》。他曾经说过：“一个科学家如果只是做出了给科学宝库增添财富的发现，而不能阐明那些引导他做出这些发现的思想，那么他就没有给科学做出足够的贡献”。

欧拉还具有渊博的文学知识和哲学修养。他在德国柏林科学院工作时期，1760到1762年间曾经为夏洛特公主函授哲学、物理学、宇宙

学、神学甚至音乐。后来，欧拉给公主的那些信件被整理成《致一位德国公主的信》一书，于1768年分三卷出版。其后，多种语言的译本流传各地，成为了童话式的故事。这使人想起了魏尔斯特拉斯的一句话：“一个没有几分诗人气质的数学家永远成不了一个完全的数学家”。

欧拉去世后被安葬在圣彼得堡的亚历山大·涅夫斯基修道院墓园。在欧拉的家乡瑞士巴塞尔的里恩，他的故居外墙壁一块小小牌匾上铭刻着一句简单的评语：Er war ein grosser Gelehrter und ein gütiger Mensch（他是一位伟大的学者，也是一个善良的人）。

后记：2011年6月4日，笔者在圣彼得堡接受了圣彼得堡国立大学授予荣誉博士学位和俄罗斯欧拉基金会颁发2011年度欧拉金质奖章。敬仰于欧拉之伟大而且善良，日后聚思成文，乐与读者分享。

未注：笔者是欧拉的第十代博士学生：

Euler-Lagrange-Fourier-Dirichlet-Kronecker-Lerch-Plancherel-Edrei-Hellerstein-Chui-Chen

作者简介：

陈关荣，香港城市大学电子工程系讲座教授，欧洲科学院院士和发展中国家科学院院士。