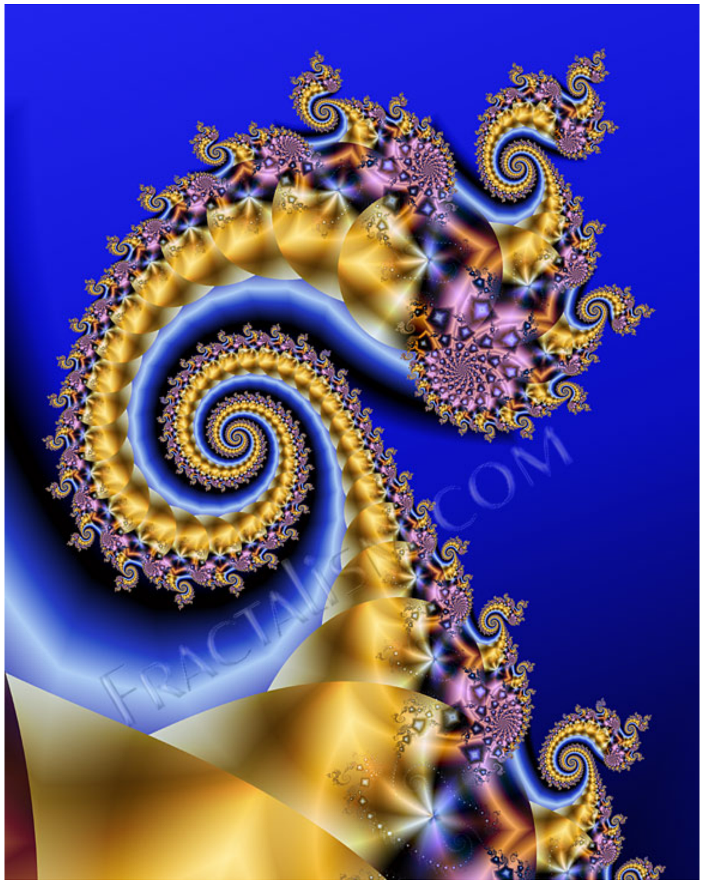
分形 – 故事之外

陳關榮



今天，“分形”的意思、其解析理論及計算方法在數學、自然科學和工程技術領域裏可以說是家喻戶曉，因而在這裏無需多費筆墨來加以定義和描述。然而，漂亮的分形到底有什麼實用價值、特別是在電子技術中有什麼可能的應用，也許需要舉幾個例子來加以詮釋。

從分形故事說起

二十世紀六十年代，當時在美國 IBM Thomas J. Watson Research Center 工作的波蘭出生法國裔數學家本華·曼德博（Bernoit B. Mandelbrot，1924-2010）探討了“英國的海岸線有多長”這個有趣的問題。他注意到，如果用公里作爲測量單位，從幾米到幾十米的一些曲折地段會被忽略；改用米來做單位，測得的總長度會增加，但一些厘米量級以下的曲折地段還是不能反映出來；進一步，從理論上來

說，海邊沙礫的下一個尺度是分子、原子，於是要使用更小數量級的尺度的話，得到的海岸線總長度就很不一樣。因此，長度不是海岸線的與尺度無關的不變量。這當然只是一個平凡的觀察。但是，平凡的觀察加上不平凡的思考，讓曼德博引進了“分數維圖形”的新概念，建立了今天熟知的分形幾何理論。

圖 1 Bernoit B. Mandelbrot（1924-2010）

曼德博獨具匠心，創造了 fractal 一詞。據他自己說，在 1975 年的一天晚上，他在冥思苦想之餘偶然翻開了兒子的拉丁文字典，看到一個形容詞 fractus（“破碎”），其對應的動詞是 frangere（“產生無規則的碎片”）。他馬上聯想到具有相同詞根的英文名詞 fraction（“分數”、“部分”）及 fragment（“碎片”），從而“突然想到”一個新詞 fractal。而在那以前，他一直是用英文單字 fractional 來表示他的分形思想的。這樣，曼德博就取拉丁詞之頭、英文之尾，開始用 fractal 來描述自然界中傳統歐幾里得幾何學所不能刻畫的一大類當時被認爲是“雜亂無章”的幾何圖形。這個新詞從此不脛而走，進入了各種語言的字典詞典，並將永留世間。

1967 年，曼德博在美國 Science 雜誌上發表了題目爲“英國的海岸線有多長？”的一篇劃時代標誌性論文，闡述了分形的新思想。1977 年，他又在巴黎出版了一部法文著作《Les objets fractals: forme, hasard et dimension》，並於同年在美國出版了其英文版《Fractals: Form, Chance and Dimension》（中譯本《分形：形狀機遇和維數》），和《The Fractal Geometry of Nature》（中譯本《大自然的分形幾何》）。但是，歷史好像也是分形的，相似的事件反復重演。像過去許多名著的命運一樣，曼德博這三本書完全沒有得到學術界應有的重視，直到 1982 年

他第三本書的第二版出來後，才受到歐美社會的廣泛關注，並迅速形成了“分形熱”。此書後來被分形學界視爲“分形學之聖經”。

曼德博於 2010 年 10 月 14 日辭世，生前是耶魯大學數學系的榮休 Sterling 講座教授、IBM 榮休 Fellow、1993 年沃爾夫物理學獎獲得者、美國國家科學院院士。

說起來有趣，分形幾何學的數學歷史從不同角度來說也同樣具有相似性。類似於分形的思想可以追溯到瑞典數學家 Niels F. H. von Koch (1870-1924)。他從一個三角形的“島”出發，通過對稱性而把它的“海岸線”變成不斷向更小尺度層次延伸的連續曲線，於是其長度也在不斷增加並趨向於無窮。

其實，類似於分形幾何的歷史思想還可以往前追溯。不妨看一看圖 2。“我在看一本科學史書時注意到了這幅圖。書上說這是中世紀、即 13 世紀晚期《聖經》中的一幅插圖。意思是，上帝按照幾何學設計了這個世界。我又搜索了一下這幅圖；一些網站顯示爲《上帝計測宇宙》，描繪了作爲宇宙建築者的神 (1250 年繪製)。” 2008 年，時爲上海交通大學數學系本科生的王雄同學在給我的電子郵件中如是說。他驚歎道，“那幅圖的幾何，很像一個 Mandelbrot 分形圖案！作爲中世紀作品畫成這樣的效果，已經是非常不錯了，很難想像會是別的什麼。”王雄後來成了我的博士研究生，現在就讀於香港城市大學，研究與分形相關的混沌理論。

圖 2 中世紀《聖經》中的一幅插圖 [1]

這裏順便提及，最早把分形幾何引進中國的可能是中科院瀋陽金屬研究所的龍期威研究員，他曾是中國科學技術大學教授並任中科院國際材料物理中心主任。他率先把分形理論應用於金屬斷裂研究，並培養了把分形方法引入到裂隙岩體非連續變

形、強度和斷裂破壞行爲研究的一位優秀學生，也就是四川大學現任校長謝和平院士。

現在回到本文的主題，即分形幾何在電子技術中有什麼潛在應用和發展前景？這裏只講兩個啓發性的例子：分形天線和分形電容器。

分形天線

分形天線是一種無線通信用的新概念天線。和傳統天線相比，它在同樣面積或體積的條件下具有最大的有效長度或周長。這種天線具有極端緊湊和多寬頻帶等特性，非常適合於 RFID 和移動通訊方面的應用。由於現代通訊工具種類越來越多，體積也越來越小，因而需要把天線做得很小很小，而且越小越好。爲此目的，把天線的形狀做成分形是個好主意，因爲這可以在同樣面積的限制條件下把天線做得很長，而且還能取代多條天線而同時工作在幾個不同頻率區間之中。

把天線陣列設計成分形樣子的做法早在 1957 年就出現了。它是由美國 Illinois 大學電機工程系教授 Raymond DuHamel 和學生 Dwight Isbell 提出的對數週期陣列（log periodic array）。分形天線陣列與傳統天線陣列設計相比，具有多頻和寬頻特性，可用於快速計算方向圖，可有效地利用狹小地域來佈置龐大的平面陣列，可實現低副瓣設計策略，等等。兩種典型的分形陣列天線是 Cantor 集陣列和 Weierstrass 線性陣列，目前多用於電視天線（圖 3）。

圖 3 分形陣列天線

基於分形結構來設計和優化單個天線的做法始於 1988 年，由 Boston 大學教授 Nathan Cohen 首先提出，但相關的學術論文到了 1995 年才第一次正式發表。一些代表性的分形天線見圖 4。

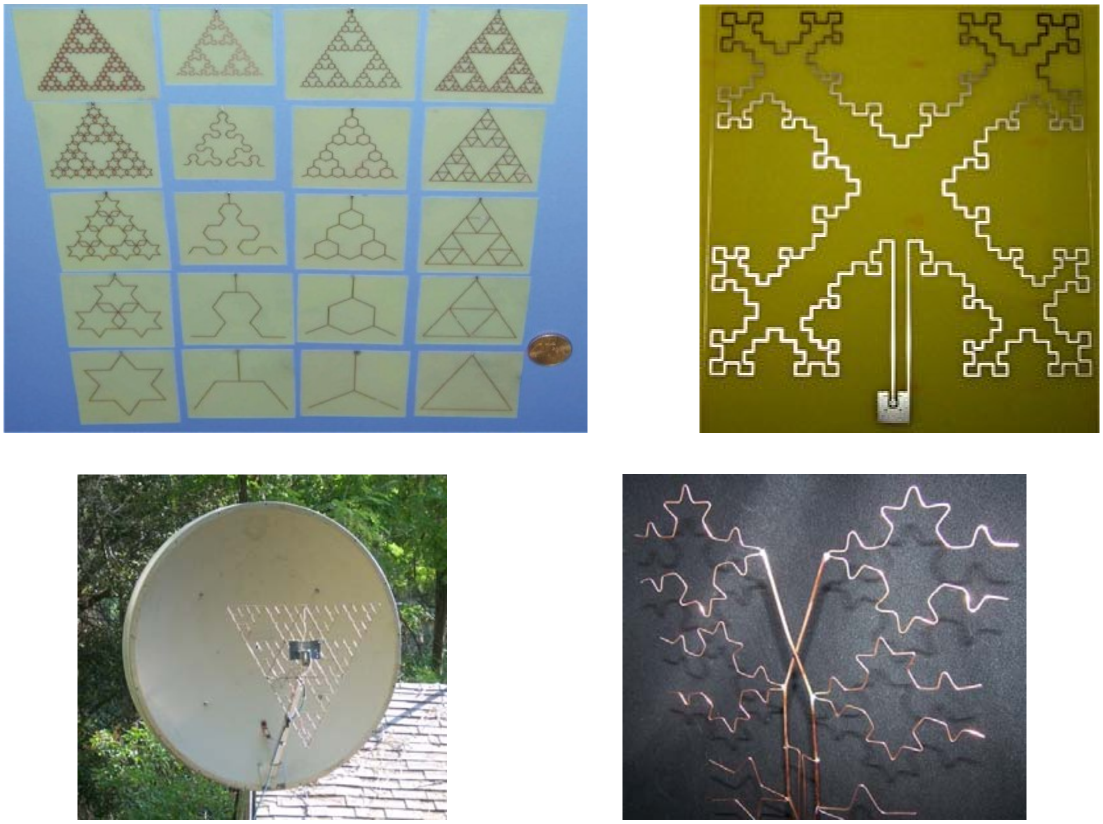


圖 4 一些代表性的分形天線

與傳統天線相比，分形天線除了在縮小尺寸方面獨具一格之外，還有其他優點，例如：可以利用其自相似性來增加工作頻帶數目和帶寬，具有自載入特性而不需要額外的調諧線圈和電容等元器件或匹配電路來輔助其在寬頻工作條件下達到阻抗匹配，還可以簡化電路設計和降低系統造價，等等。據報導，基於分形設計的天線可以在 UHF（862-928 MHz）頻帶的無線通信設備中和 GSM+DCS（900MHz 和 1800MHz）雙頻移動天線系統中得到較好的應用。目前的研究主要集中在 GSM（900MHz），PCS（1900MHz）、藍牙無線通信系統 （2.4GHz） 等方面。它不僅可以在個人手提（如 cellular phone 即蜂窩電話）和其他無線移動設備（如無線局域網中的 laptop 即筆記本電腦、車載天線系統）中得到應用，還可望用於衛星通信系統和相控陣雷達系統。目前看來，如果相關的一些技術障礙（如多頻道信號之間的相互干涉）能夠取得突破，則分形天線的前景還是頗爲誘人的。

當然，從數學的角度來看，嚴格地說這些例子都只是利用了有限分形、或者稱爲僞分形（如圖 5 所示），因而尚有潛力可以挖掘。事實上，目前一切還在嘗試之中，期待新的進展。

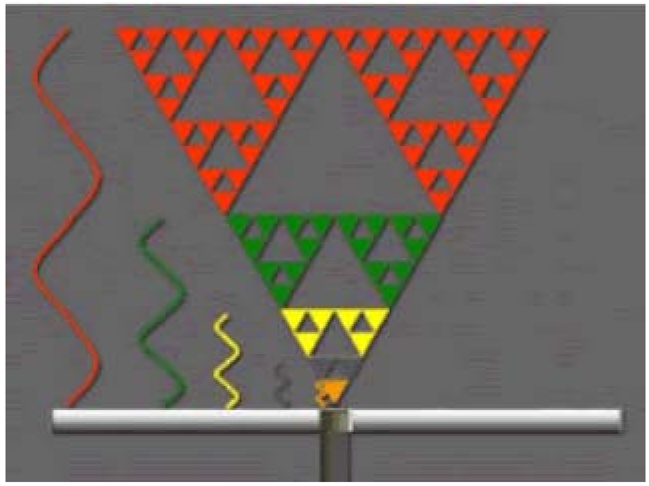


圖 5 有限分形（僞分形）天線

據報導，新近迅猛發展的納米變形材料（Metamaterials）和用變形材料製造的天線都充分考慮到有效地利用分形幾何結構（圖 6）。

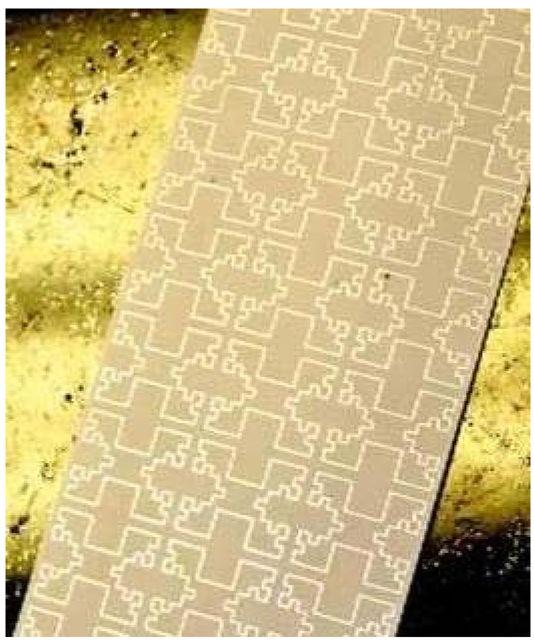


圖 6 變形材料製造的分形天線

2011 年還有報導說［2］，用密封分形共振器合成的寬頻變形材料可以製造出隱形外套，其原理是可以讓光繞過這些材料而實現傳播和折射（圖 7）。

圖 7 用具有分形結構的變形材料製造出隱形外套［2］

分形電容

分形電容器設計的基本思想和分形天線是一樣的。理論上，前者是在有限的面積內獲得無限長的曲線以增加天線的有效長度，後者則是在有限的體積內獲得無限寬的曲面以增加電容器的儲電容量。

研究發現［3］，在傳統的電容器中把部分縱向的相反電極分佈改爲橫向的話可以有效地提高其儲電量。如圖 8 所示，中間的電容器結構要比頂層的那個儲電量高，而底層的那個結構的儲電量更高。圖 9 是根據這個思想設計出來的一個分形電容器的示意圖。圖 10 則是分形電容器的一個原型。

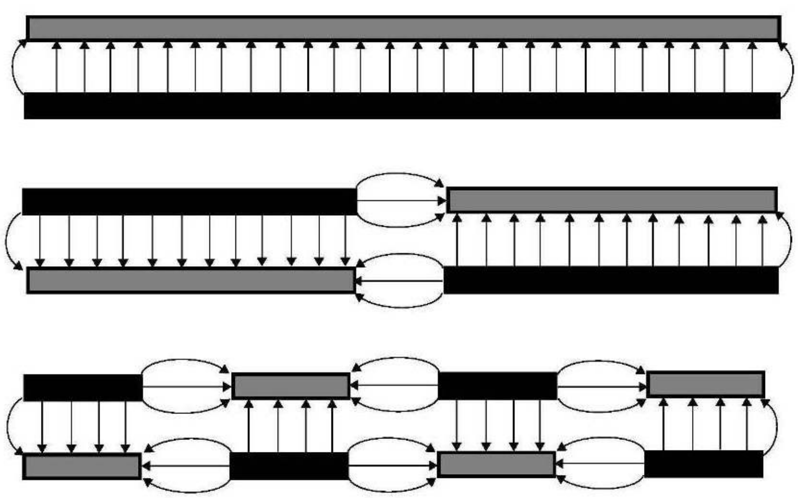


圖 8 增加橫向的相反電極數目能有效地提高電容器的儲電量［3］

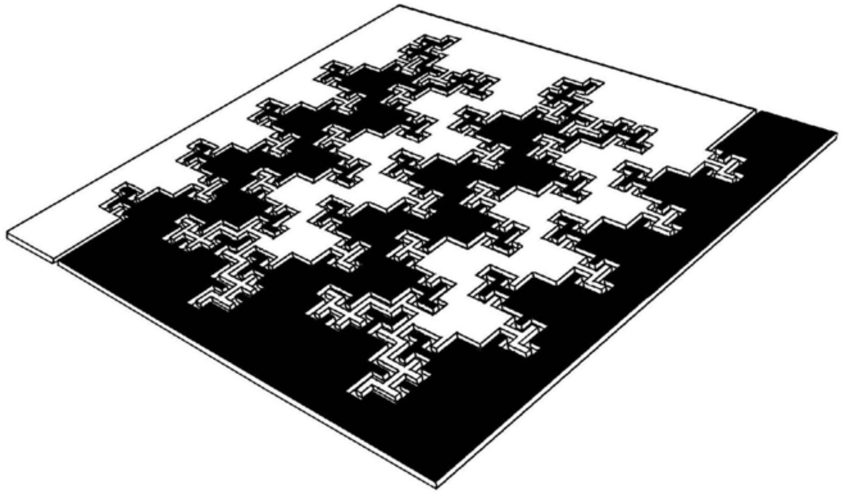


圖 9 分形電容器設計示意圖 [3]

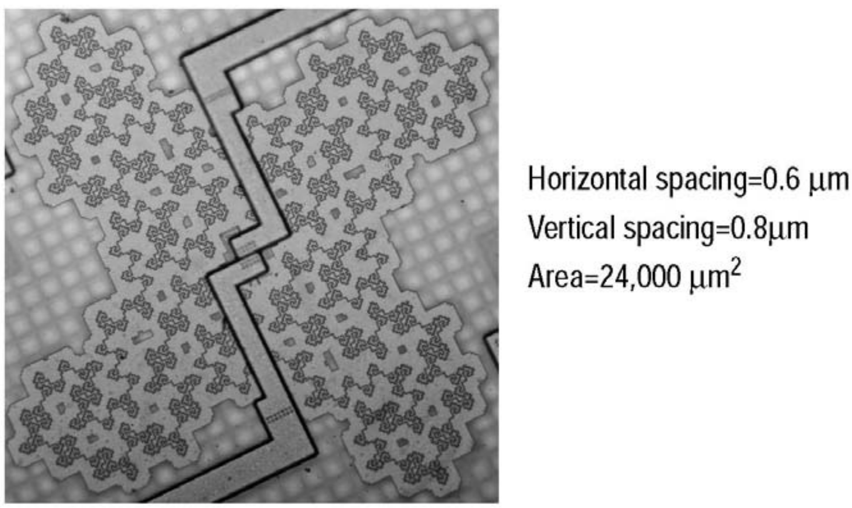


圖 10 分形電容器的一個原型 [3]

把上述分形電容器的設計思想推廣到三維是一個數學上很自然的做法，也適應了實際應用的需求。圖 11 介紹了實現這個想法的幾種設計方式。圖 12 是分形電容器的一個設計原型。

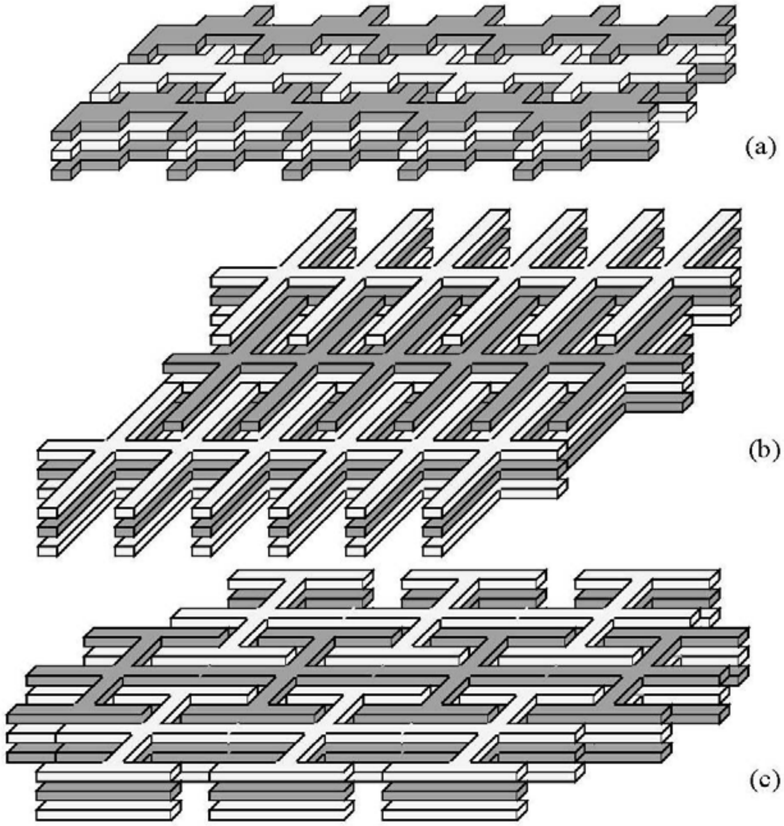


圖 11 三維分形電容器的幾種設計方式 [4]

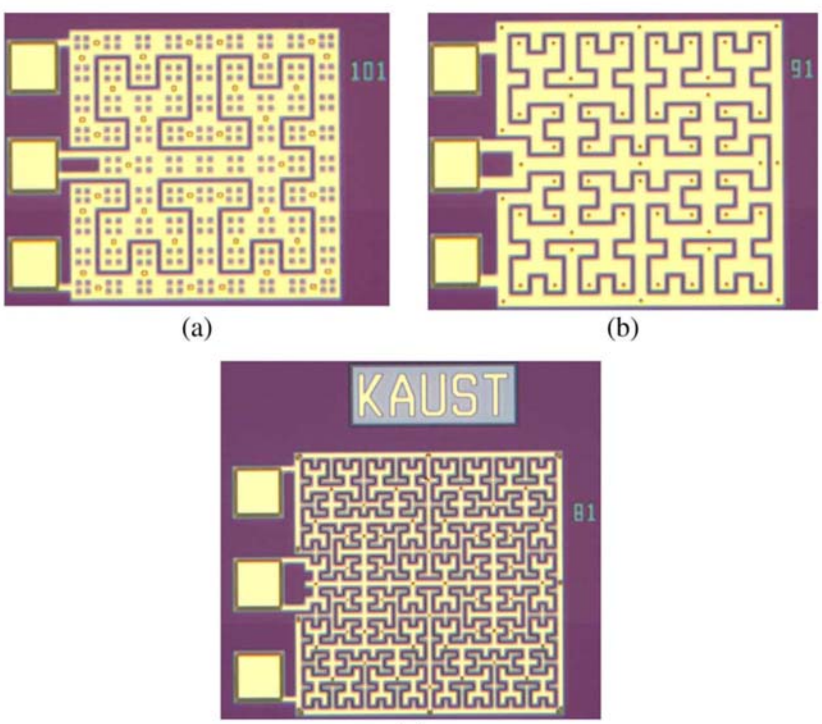


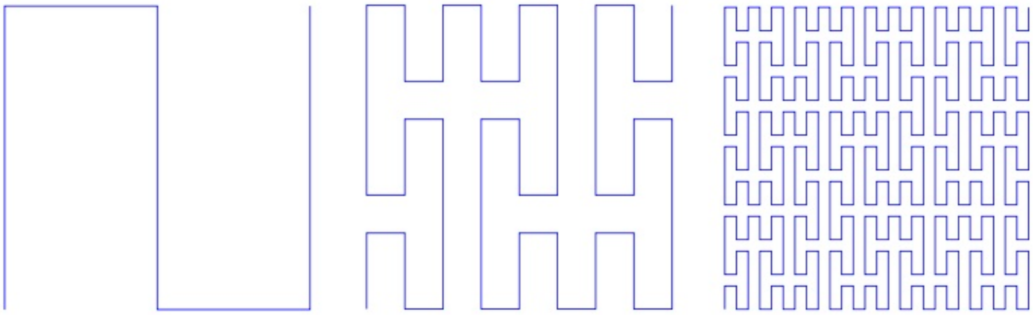
圖 12 分形電容器的一個設計原型 [5]

分形電容器應用的一個成功試驗性例子是由瑞士 Paul Scherrer Institute 公司研製的分形超級電容器（supercapacitor 或 ultracapacitor）[6]，被安裝在一輛名爲 *Hy.Power* 的燃料驅動小汽車裏，用作汽車爆發加速時的拖動功率補給。2002 年 1 月 16 日，*Hy.Power* 成功地爬上了位於瑞士 Brig 與義大利 Domodossola 之間海拔兩千多米高的 Simplon 山口（圖 13）。這段山路極爲陡峭，而且當時山頂氣候條件惡劣，同類型的小汽車只能望山興歎 [7]。

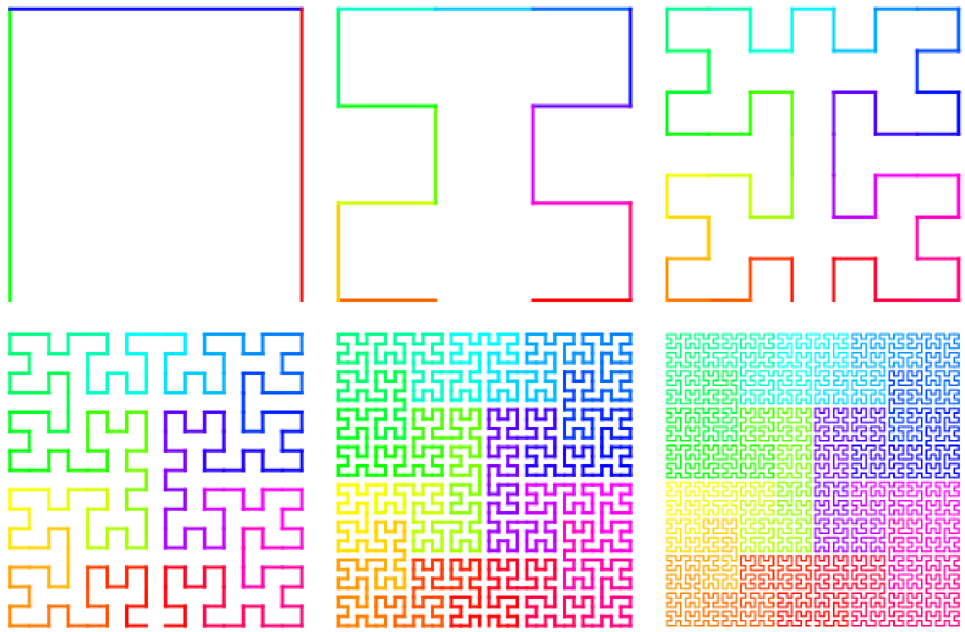
圖 13 配備有分形電容器的 *Hy.Power* 汽車爬上 Simplon 山口

相關的分形數學

說到分形天線和分形電容器的數學思想和原理，還得從 Peano 曲線（誕生於 1890 年）和 Hilbert 曲線（誕生於 1891 年）談起。這兩種曲線如圖 14 所示。這類曲線通過反復迭代而不斷捲縮並延長。例如，Hilbert 曲線的第 n 次迭代的長度是 $2^n - \frac{1}{2^n}$，可見其長度趨於無窮。有趣的是，這些貌似一維的曲線的 Hausdorff 維數是 2 而不是 1，也就是說它們最終可以充滿整個方塊。



(a) Peano 曲線



(b) Hilbert 曲線

圖 14 平面填充曲線

具體地說，Hilbert 曲線是如圖 15 所示來產生的。

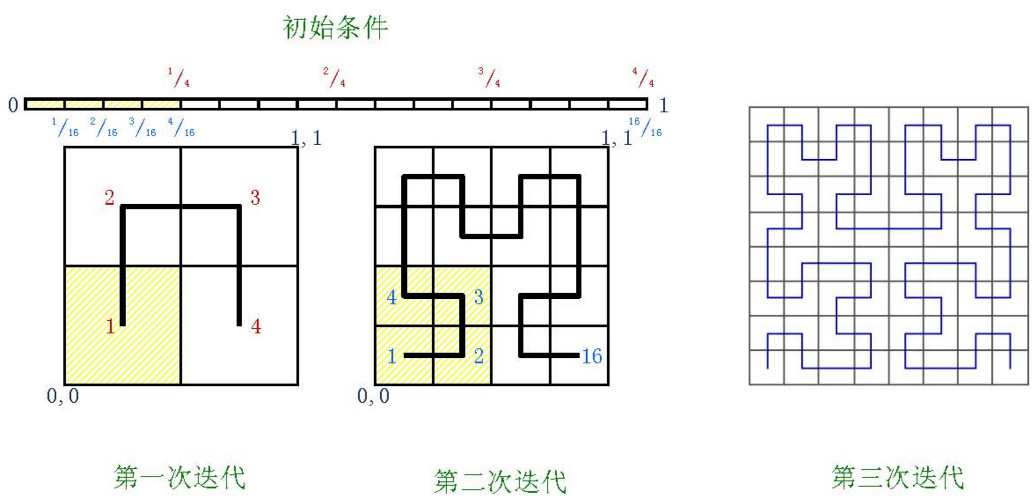


圖 15 Hilbert 曲線的生成

如果使用字母的一種語法表示（Lindenmayer 系統，簡稱 L-系統），則可能更爲容易理解和記住迭代的法則：例如，在圖 15 中第一次迭代後得到的圖形就是圖 16 中

的 H 圖形；把 H 變成箭頭右方的 4 小塊 $\begin{bmatrix} H & H \\ A & B \end{bmatrix}$ 便得到在圖 15 中第二次迭代後的圖形；再把分別相應於 H H A B 箭頭右方的 4 小塊放進 $\begin{bmatrix} H & H \\ A & B \end{bmatrix}$ 中便得到在圖 15 中第三次迭代後的圖形；如此類推。

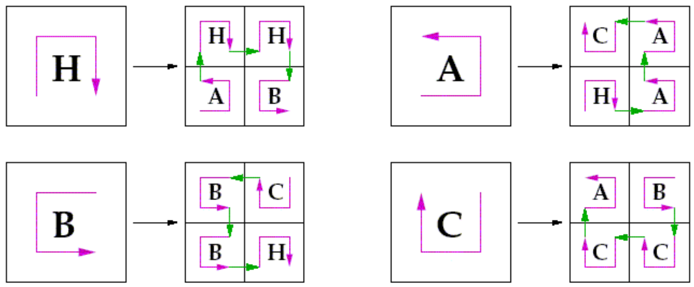


圖 16 用 L-系統法則生成 Hilbert 曲線

圖 17 中 T-恤上染印的是迭代五次以後所獲得的 Hilbert 曲線圖形，而迭代六次以後獲得的 Hilbert 曲線圖形如圖 18 所示。

圖 17 T-恤上印有迭代 5 次後獲得的 Hilbert 曲線圖

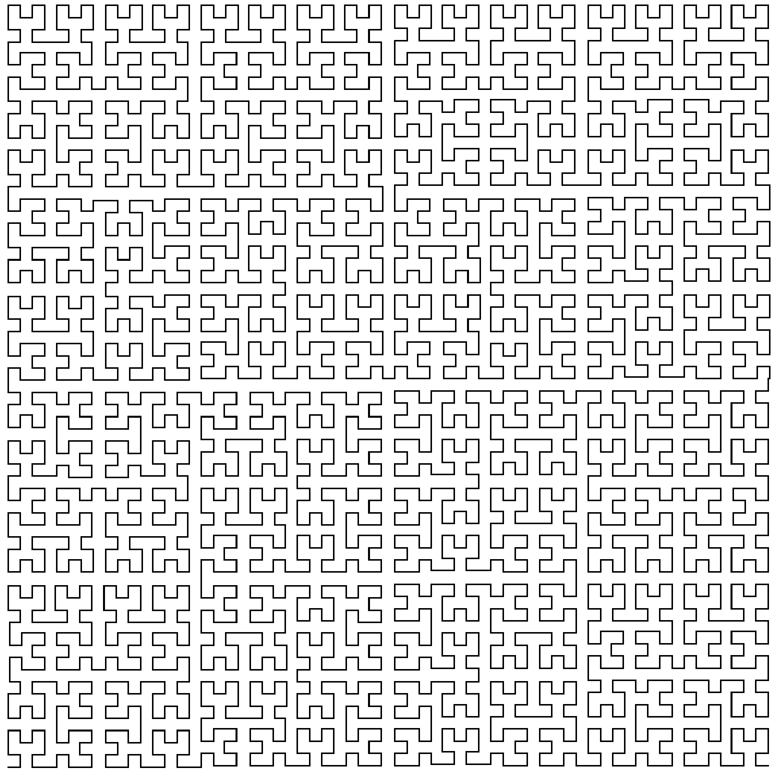


圖 18 迭代 6 次以後獲得的 Hilbert 曲線圖形

三維的 Hilbert 曲線如圖 19 所示，也稱爲空間填充曲線。

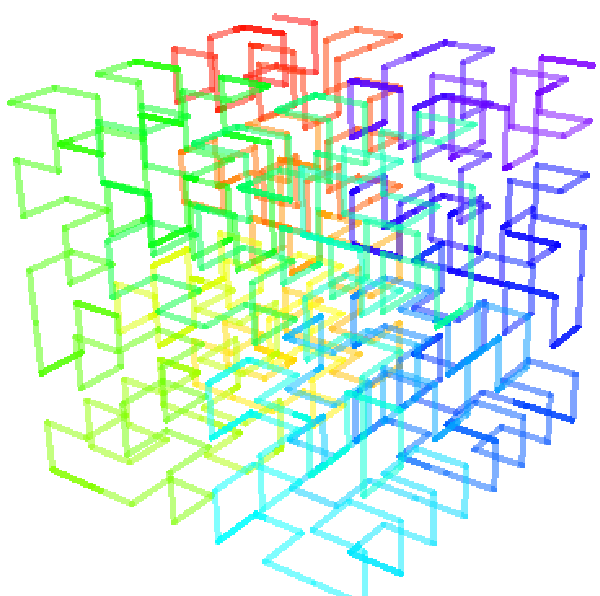


圖 19 三維 Hilbert 曲線圖

結束語

應該說，分形幾何在自然界、物理學和工程技術中的應用還只是初見端倪。

除了大家都已經很熟識的植物枝幹葉子構成的分形、陸地迂迴曲折的海岸線形成的分形之外，在人體內血管的分佈和大腦的皺褶等地方（圖 20），你都能夠看到各種分形或者類似分形的幾何特徵。

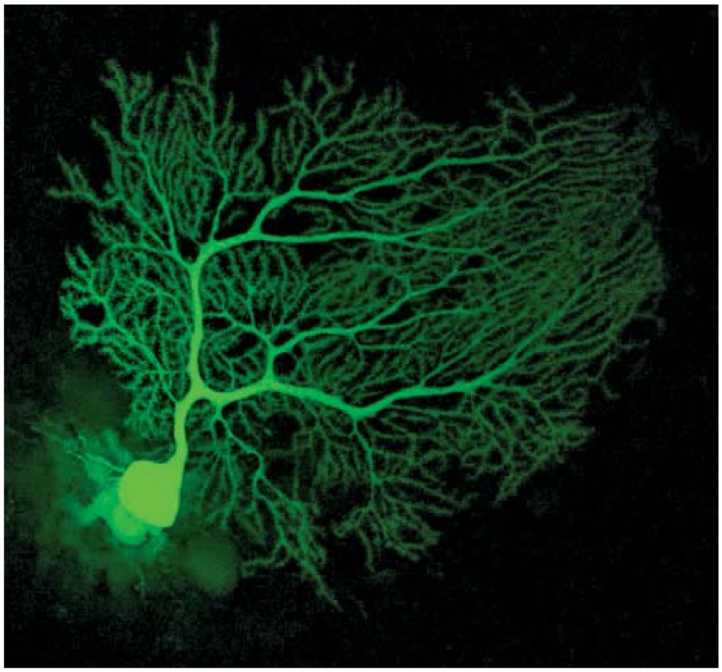


圖 20 Purkinje 神經細胞

在顯微鏡下觀察落入溶液中的一顆花粉，你會發現它不間斷的無規則運動（布朗運動）的軌跡是由不同尺度的連續折線相接而成的。這條曲線的分形維數是 2 而不是 1，因而和 Hilbert 曲線一樣，理論上可以逐漸遍歷整個遊走過的平面區域。

圖 21 是 2005 年美國宇航局從國際空間站拍攝到的埃及境內納塞爾湖的照片，上面呈現出來納塞爾湖的水流分支就有很明顯的分形結構。另一幅對我國黃土高原中部山西省岢嵐縣所拍攝到的照片（圖 22）也有明顯的分形結構。

在物理化學領域中，在某些電化學反應過程裏電極附近沉積的一些固態物質是以不規則的樹枝形狀向外增長的。在化學震盪反應、流體力學不穩定性、光學雙穩器件動力學實驗和分析中，都可以通過實際測量得到各種分形幾何結構或者通過大型計算得到數據序列的分形維數。在工程技術領域裏，已經出現了圖像分析用的分形濾波器（fractal filter），使用分形編碼（fractal coding）的圖形分形壓縮技術（fractal image compression），等等。

圖 21 埃及納塞爾湖的航拍照片

圖 22 中國黃土高原中部山西省岢嵐縣的航拍照片

分形在工程技術中的眾多應用反過來向數學提出了諸多新的問題和挑戰。以上面談及的分形電容器爲例，在大學普通物理中介紹過如何來計算簡單平板電容器的電容量：如圖 23 所示，假設兩個相距爲d（單位：米m）的同質電極的面積均爲A（單位：平方米m^2）。在電壓差ΔU（單位：伏特 Volt）的作用下產生電場$E=\Delta U/d$（單位：伏特/米）。這時，電容器的電容量C（單位：法拉F）及其存儲的電能量J（單位：度W）由下面兩式給出：

$$C=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}\text{，}\quad J=\frac{1}{2}C(\Delta U)^2$$

其中$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$（單位：法拉/米$F/m$）是一個基本常數，$\varepsilon_r$是兩塊平板電極之間媒質的介電常數（例如，真空爲 1，水爲 81）。

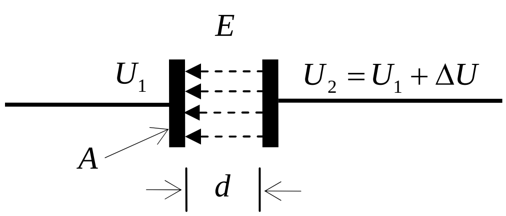


圖 23 基本平板電容器

現在，一個顯然是十分有用但還沒有答案的數學問題是：對於上面描述的各種有限分形電容器，如何分別推導出由該分形幾何參數決定的、計算其總電容量的解析計算公式？工程技術人員在等待著數學家們的回答。

如上所述，從數學的角度來看，嚴格地說前面提到的所有例子都只是利用了有限分形（僞分形）。容易想像，真正的分形幾何學還有很大的潛力有待開發和挖掘。希望在不久的將來，隨著科學技術的進一步發展和突破，我們能夠看到分形幾何獲得越來越多、也越來越成功的各種實際應用。

致謝

作者感謝 Maciej Ogorzalek 教授提供了一些相關資料。文中沒有標明出處的圖片均從互聯網上的無版權網頁下載。

參考文獻

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/File:God_the_Geometer.jpg
[2] http://www.fractenna.com/whats/110915.html
[3] H. Samavati, A. Hajimiri, A. R. Shahani,G. N. Nasserbakht, and T. H. Lee, “Fractal capacitors,” IEEE J. of Solid-State Circuits, 33(12): 2035-2041, 1998
[4] R. Aparicio and A. Hajimiri, “Capacity limits and matching properties of integrated capacitors,” IEEE J. of Solid-State Circuits, 37(3): 384-393, 2002
[5] A. M. Elshurafa, A. G. Radwan, A. Emira, and K. N. Salama, “RF MEMS fractal capacitors with high self-resonant frequencies,” J. of Microelectromechanical Systems, 21(1): 10-12, 2012
[6] http://ecl.web.psi.ch/supercap/index.html#power
[7] F. Gassmann, R. Kötz and A. Wokaun, “Supercapacitors boost the fuel cell car,” Europhysics News, 34: 176-180, 2003