

我們必須知道，我們必將知道

陳關榮

Wir müssen wissen, wir werden wissen（我們必須知道，我們必將知道）——這是大衛·希爾伯特 1930 年退休感言的結束語，鑄刻在哥廷根城市墓地（Stadtfriedhof Göttingen）裡他那簡單墓碑的下方。



（2015 年 9 月 10 日，本文作者在哥廷根參拜了希爾伯特墓地）

大衛·希爾伯特 (David Hilbert, 1862-1943) 出生於東普魯士的哥尼斯堡 (Königsberg) 附近。哥尼斯堡是哲學家康得的故鄉，也是歐拉研究七橋問題和數學家雅可比任教的地方，現在歸屬俄羅斯。1880 年，希爾伯特違背了父親讓他讀法律的意願而進入哥尼斯堡大學學習數學，師從林德曼 (Carl von Lindemann, 1852-1939)，22 歲獲得博士學位。之後留校任教，31 歲晉升正教授。1895 年，希爾伯特轉入哥廷根大學 (全稱是 Georg-August-Universität Göttingen) 任職教授，在那裡度過了餘生，於 1943 年辭世。他曾獲俄羅斯羅巴切夫斯基獎和瑞典科學院 Mittag-Leffler 獎，1942 年當選為柏林科學院榮譽院士。



David Hilbert (1862-1943)

希爾伯特是歷史上最卓越的數學家之一，在不變數理論、代數數論、積分方程、變分法、泛函分析、數學和幾何學基礎、數學物理等領域中作出了十分重要的貢獻。今天，「希爾伯特空間」、「希爾伯特變換」、「希爾伯特矩陣」、「希爾伯特曲線」等冠以其名的術語和他那有趣的「希爾伯特旅館悖論」均廣為人知。

1900 年，38 歲的希爾伯特在巴黎舉行的第二屆國際數學會議上以「數學問題」為題的演講中提出了 23 個重要的數學難題，即眾所周知的「希爾伯特問題」，激勵和推動了後來一個多世紀許多數學分支的蓬勃發展。簡而言之，希爾伯特的第 1-6 問題關於數學基礎理

論，第 7-12 問題關於數論，第 13-18 問題屬於代數和幾何，而最後的第 19-23 問題屬於數學分析範疇。經過許多數學家長期的努力，目前大多數問題都得到了完全或部分解答。鑒於他本人的研究興趣和當時的歷史條件，希爾伯特問題中未能包括拓撲和微分幾何等重要領域的數學問題，也基本上沒有涉及應用數學和計算數學。當然，沒有人會苛求希爾伯特用 23 個問題去涵蓋浩瀚的數學分支和內容。實際上，二十世紀數學的發展遠遠超出了希爾伯特當時的設想。

希爾伯特的第二問題是有名的「判定問題」，它至關重要，涉及整個數學基礎，關心數學是否完備和一致？是不是所有數學命題都可以通過有限次正確的數學步驟作出判定？希爾伯特雄心勃勃，要將整個數學體系嚴格公理化，然後用他的所謂「元數學」（證明數學的數學）來證明整個數學體系是堅不可摧的。為了這個目標，他制定了一個後人稱之為「希爾伯特計劃」的部署：首先，將所有數學形式化，把每一個數學陳述都用符號來表達。然後，證明整個數學系統是完備的，即對任何一個數學陳述都存在一個數學證明。同時，還要證明數學是一致的，也就是說絕不存在自相矛盾的陳述。最後，還要有一個可以實現的演算法，通過有限步程式最終判定數學陳述的對錯。顯然，這是一個野心勃勃的宏圖大計，但希爾伯特並不認為它是不可能的。他非常自信，斷言「不存在不可解的問題」。

遺憾的是，「希爾伯特計劃」在他 1930 年光榮引退後隨即慘遭失敗。1930 年 9 月 7 日，時年 25 歲的哥德爾（Kurt Friedrich Gödel, 1906-1978）發表了著名的「不完備性定理」：「如果數學是一致的，那麼它就是不完備的」。具體地說，哥德爾證明了：任何一個包含算術系統在內的數學系統不可能同時是完備的和一致的。換句話說，人們如果能在一個數學系統中做算術的話，那麼這個系統或者是自相矛盾的，或者存在一些結論在這個系統內是無法證明的。其次，他證明了，對於任意一個包含算術系統的數學系統來說，不可能在這個系統內部證明它本身的一致性。哥德爾的結論對當時整個數學界來說無疑是一次顛覆性的衝擊。希爾伯特特別無選擇，旋即對計劃作了修正，取消了有限步驟這個約束。隨後，根茨（G. Gentzen, 1909-1945）於 1936 年使用某種非形式化方法（超限歸納法）

證明了算術公理系統的一致性。雖然這一切與希爾伯特的初衷有別，但是他的元數學、形式化和證明論的基本思想依然深刻地影響了許多後世數學家。

談論希爾伯特不能不提及哥廷根大學和哥廷根數學學派。

哥廷根大學屬於德國，卻是由英王喬治二世於 1734 年創立的，初期以法學聞名於世，被稱為「法科大學」，培養出許多傑出的政治家、哲學家、語言學家和教育家，如奧地利首相克萊門斯·梅特涅（Klemens von Metternich, 1773-1859）、柏林大學創立者威廉·洪堡（Wilhelm von Humboldt, 1767-1835）、大詩人海因里希·海涅（Christian Heine, 1797-1856）、文學巨匠格林兄弟（Jacob Grimm, 1785-1863 和 Wilhelm Grimm, 1786-1859）、哲學家亞瑟·叔本華（Arthur Schopenhauer, 1788-1860）以及社會學家馬克斯·韋伯（Max Weber, 1864-1920）和尤爾根·哈貝馬斯（Jürgen Habermas, 1929-）等。此外，德意志帝國「鐵血宰相」奧托·俾斯麥（Otto von Bismarck, 1815-1898）也是該校畢業生。法國統帥拿破崙（Napoléon Bonaparte, 1769-1821）曾在此研習法律，說「哥廷根是屬於全歐洲的。」哥廷根大學著名校友中還有中國的大師季羨林，他 1937 年在該校求學時兼任漢學系講師，於 1941 年獲博士學位。

除了法學和哲學之外，哥廷根大學更是世人矚目的自然科學和文化中心，以宣導學術自由和獨創風格聞名於世。這種學風和治學精神使它一度成為培育世界級科學巨匠的搖籃，先後有 47 位諾貝爾獎得主在此讀書畢業、秉職任教或長期訪研，主要為物理和化學獎，並有一些醫學、和平以及文學獎。最近獲得諾貝爾獎的有 2013 年生理學獎得主 Thomas C. Südhof（1982 年哥廷根大學神經化學博士）和 2014 年的化學獎得主 Stefan W. Hell（時任哥廷根普朗克生物物理化學研究所主任）。

回顧哥廷根大學二百八十多年的歷史，可知她在十九和二十世紀達到鼎盛，出現過電磁學家威廉·韋伯（Wilhelm Eduard Weber, 1804-1891）和原子彈之父羅伯特·奧本海默

(Julius Robert Oppenheimer, 1904-1967)，以及二十多個物理諾貝爾獎和十多個化學諾貝爾獎得主的教員和學生，包括熟知的赫茲 (Heinrich Hertz, 1857-1894)、普朗克 (Max Planck, 1858-1947)、哈恩 (Otto Hahn, 1879-1968)、玻恩 (Max Born, 1882-1970)、德拜 (Peter Debye, 1884-1966)、泡利 (Wolfgang Pauli, 1900-1958)、海森堡 (Werner Heisenberg, 1901-1976) 和費米 (Enrico Fermi, 1901-1954)。哥廷根大學的數學成就同樣燦耀無比，在那裡群星薈萃，出現過許多數學大師，包括高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)、狄利克雷 (Johann Dirichlet, 1805-1859)、黎曼 (Bernhard Riemann, 1826-1866)、戴德金 (Julius Wilhelm Dedekind, 1831-1916)、克萊布希 (Alfred Clebsch, 1833-1872)、韋伯 (Heinrich Weber, 1842-1913)、許瓦茲 (Hermann Schwarz, 1843-1921)、克萊因 (Felix Klein, 1849-1925)、柯瓦列夫斯卡婭 (Sofia Kovalevskaya, 1850-1891)、希爾伯特 (David Hilbert, 1862-1943)、閔可夫斯基 (Hermann Minkowski, 1864-1909)、諾特 (Emmy Noether, 1882-1935)，以及希爾伯特的學生外爾 (Hermann Weyl, 1885-1955) 和柯朗 (Richard Courant, 1888-1972)。在數學史上，哥廷根大學的數學有過兩大輝煌時期——高斯時期 (十九世紀) 和克萊因-希爾伯特時期 (二十世紀)。

高斯被認為是歷史上最最重要的數學家之一，享有「數學王子」的盛譽。他出生於平民家庭，父親一生做雜工，母親沒有文化。高斯自幼聰穎好學，他 10 歲時巧妙地算出級數 $1 + \dots + 100$ 求和的故事家喻戶曉。高斯 22 歲獲博士學位，在博士論文中給出了代數基本定理的第一個嚴格證明 (他後來還給出另外三個證法，其中最後一個是他 71 歲時公佈的)。他 25 歲當選聖彼德堡科學院外籍院士、30 歲出任哥廷根大學數學教授。人們對他用圓規直尺作圓內接正十七邊形特別是最小平方法和正態分佈耳熟能詳。他的數學貢獻涵蓋數論、代數、統計、分析、微分幾何、複變函數、矩陣理論等許多方面，並曾對非歐幾何有過創始性的研究。高斯的內蘊曲面幾何學思想啟發了他的學生黎曼發展出高維空間的一般內蘊幾何學，後來成為愛因斯坦廣義相對論的數學基礎。愛因斯坦曾說：「高斯對於近代物理

學的發展，尤其是對於相對論的數學基礎所作的貢獻，其重要性是超越一切、無與倫比的。”

高斯同時又是一個物理學家和天文學家，一生成就極為豐碩，對數學、力學、天文學、電磁學、大地測量學、地球物理學以至光學都有卓越貢獻，以他名字命名的成果有一百多個。高斯和威廉·韋伯一起從事磁學研究（因而產生了磁通密度單位：1 韋伯/平方公尺=10000 高斯）、畫出了世界上第一張地球磁場圖並確定了地球磁南北極位置，並一起設計了前所未有的有線電報機。高斯還憑藉數學計算準確地預測了谷神星（Ceres）的存在並由此啟導了智神星（Pallas）以及其他一些行星的發現，之後兼任過哥廷根大學天文學教授和天文台台長。高斯畢生在哥廷根大學任教，直至 77 歲時於睡夢中安然辭世。高斯的第一教授位置先後由狄利克雷和黎曼接任。

高斯一生衣食簡樸、深居簡出。據說他只參加過一次學術會議，就是 1828 年柏林自然科學工作者大會。他不涉足政治，不參與公開爭論，對關於自己的流言蜚語也不正式辯解，即使在 1837 年 11 月 18 日著名的「哥廷根七君子」（Göttinger Sieben）事件中，當包括語言學家格林兄弟、高斯的長期合作者物理學家威廉·韋伯以及高斯自己的女婿東方學家埃瓦爾德（G. H. A. von Ewald）等七位著名學者因抗議國王廢除憲法而被集體解職時，高斯也保持緘默。高斯是個完美主義者，一般不發表未成熟和自覺價值不高的論著。他培養的博士學生不多，但卻有高足黎曼、戴德金、莫比烏斯（August Möbius）和貝塞爾（Friedrich Bessel）。由於高斯自身的勤奮努力和極高水準的學術貢獻，他在哥廷根引領出一個數學學派。他本人的數學文匯《高斯全集》（Carl Friedrich Gauss Werke）共 12 卷，由眾多著名數學家參與編輯，其出版歷時六十多年（1863-1929），在克萊因統籌主導下完成。

值得一提的是高斯的學生黎曼，在學術上完全秉承了導師嚴謹的治學風格。黎曼只有短短的四十年人生，正式發表的論文不多，可是他的名字卻頻繁地出現在後來的數學文獻裡，

諸如黎曼積分、黎曼引理、黎曼映照定理、黎曼-希爾伯特問題、柯西-黎曼方程、黎曼思路回環矩陣、黎曼曲面、黎曼流形、黎曼空間，特別是迷人的黎曼 zeta 函數。黎曼留給後人的最大難題是著名的「黎曼猜想」，即希爾伯特 23 個問題中的第 8 問題，它要求回答黎曼 zeta 函數的非平凡零點是否全部位於複平面實部為 $1/2$ 的直線上？這是一個至今懸而未決的最重要的數學問題之一。據說希爾伯特老年時曾被人問到：「假定你去世後有一天能夠復活，那麼您會去做什麼呢？」希爾伯特毫不遲疑地回答：「我會首先去打聽黎曼猜想解決了沒有。」



(本文作者是高斯第十代博士學生：

Gauss-Bessel-Scherk-Kummer-Schwarz-
-Fejer-Polya-Edrei-Hellerstein-Chui-Chen)

高斯之後，克萊因引領出了哥廷根數學學派的第二個強盛時期，即克萊因-希爾伯特時期。

克萊因在 1871 年服完兵役後來到哥廷根大學出任數學講師，開始了他的學術生涯。次年，23 歲的他便被埃爾朗根(Erlangen)大學聘為數學教授。之後，他曾在慕尼黑高等技術學院和萊比錫大學任教。克萊因 1886 年回到哥廷根大學並在那裡工作至 1913 年 64 歲退休。1872-1895 年間克萊因任《哥廷根數學年刊》主編，期間還編輯了《數學百科全書》並親自編寫了第 4 卷。克萊因 1885 年被英國皇家學會選為外籍院士，1908 年擔任在羅馬召開的國際數學家大會主席，1913 年被選為利奧波第那科學院(Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldina, 即今天的德國科學院)院士。

克萊因最廣為人知的是他的「克萊因瓶」，概念上和「莫比烏斯帶」類似，簡單有趣，引人入勝。克萊因最出名的是他 1872 年在埃爾朗根大學哲學系和大學理事會上所做的題為「關於近代幾何研究的比較考察」的演講，被後人稱為「埃爾朗根綱領」，論證了如何把多種幾何（黎曼幾何除外）統一在變換群論觀點之下。

克萊因具有非凡卓越的組織和領導能力。他最成功的是組織並帶領了哥廷根數學學派乃至整個哥廷根大學自然科學學派在世界學術原野上異峰突起。1893 年，克萊因從芝加哥世界博覽會回國後，有感於美國理論研究在工業應用上的成功，開始宣導理論與實踐相結合，引導哥廷根大學的自然科學突破純科學與實際運用之間的界線，以適應科學繁榮與工業化時代的需求，竭力促進數學、力學和其他基礎學科在工程技術中的應用，並在哥廷根大學成立了應用力學系。克萊因主張並敦促哥廷根大學聘用了大批當時最優秀的自然科學家，例如 1895 年把希爾伯特從哥尼斯堡大學以正教授引進。1900 年，希爾伯特便以克萊因的「埃爾朗根綱領」為基礎扛起了世界數學家首領的大旗。希爾伯特也十分關注物理學，還專門把他認為「數學較差」的愛因斯坦請到哥廷根大學討論後來被稱為愛因斯坦方程的物理學含義。討論中，哥德爾為愛因斯坦方程找到了一個精確解，讓他滿載而歸。1902 年，

克萊因把閔可夫斯基請到哥廷根大學任教，他是幾何學大師和數學物理學科創始人之一，是愛因斯坦的數學老師，他為愛因斯坦日後創立相對論奠定了堅實的數學理論支撐，去世時年僅 45 歲。1926 年春，希爾伯特又把馮·諾依曼（John von Neumann, 1903-1957）請到哥廷根大學擔任他的助手。1904 年，克萊因還把卡爾·龍格（Carl Runge, 1856-1927）請到了哥廷根工作，同時推薦了工程學出身的路德維希·普朗特（Ludwig Prandtl, 1875-1953）為應用力學系主任。以普朗特和他的學生馮·卡門（Theodore von Kármán, 1881-1963）為代表的近代力學學派首先在哥廷根大學成長發展，那是和克萊因的努力分不開的。馮·卡門於 1930 年移居美國，任職加州理工大學並培養出中國學生錢學森、錢偉長和郭永懷。普朗特在哥廷根留下的另一個著名力學家學生是赫爾曼·施里希廷（Hermann Schlichting, 1907-1982）。其它例子包括 1905 年到訪哥廷根大學的斯蒂芬·鐵摩辛柯（Stephen Timoshenko, 1878-1972）、1909 年到任的愛德蒙·朗道（Edmund Landau, 1877-1938）以及 1920 年述職的理查·柯朗。事實上，要列出克萊因時期一個連短期訪客都包括在內的清單是累贅困難的，即使只限於數學方面人們也很容易就能列舉諸如霍普夫（Heinz Hopf）、阿廷（Emil Artin）、亞歷山大洛夫（P. S. Alexandroff）、范德瓦爾登（Bartel van der Waerden）、費勒（William Feller）和波利亞（George Polya）。外爾曾經寫道：「克萊因像上帝般地統治著哥廷根，他神一樣的力量主要來自於他的個性和對工作的熱心奉獻以及做好事情的能力。」

由於克萊因的卓越領導，哥廷根大學還不斷開闢出新的交叉學科。僅在 1896 至 1907 年間，該校就誕生了世界上最早的物理化學、電化學、地球物理學、應用數學、應用力學、應用電子學，並在這六個新學科都引進了首屈一指的領銜教授。在那些自然科學最為基礎的學科如物理化學以及醫學中，哥廷根大學也開闢了許多新的專業方向，推動並實現了哥廷根大學從人文社會科學向自然科學轉移。事實上，哥廷根大學的科學家們在第一次世界大戰前，在希爾伯特、德拜、弗蘭克、哈恩、玻恩等人的領導下，就已經開始了原子核物理方面的研究，從而使哥廷根成為最早的「世界原子核物理中心」。後來成為美國原子彈之父的奧本海默以及曼哈頓工程中最為傑出的一批科學家全都是當年哥廷根大學勤奮好學的年

輕學子。有趣的是，多年之後，在 1955 年 4 月 12 日由 18 位聯邦德國的原子物理學家和諾貝爾獎得主聯名發表了著名的《哥廷根宣言》，告誡各國政府使用氫彈的核戰爭將給人類帶來毀滅性的災難，敦促他們放棄以武力作為實現政治目的的手段，表達了科學家強烈的社會責任感。

哥廷根大學和哥廷根學派後來的低落完全歸罪於納粹。1930-40 年代第二次世界大戰時期，希特勒迫害猶太人的黑色恐怖塗炭了哥廷根大學，迫使幾乎所有的哥廷根學派成員移居美國。這個歷史轉折讓哥廷根大學從此一蹶不振，卻無意中幫助當時學術自由、包容並蓄的美國成就了新的一代輝煌。

