



纳维、斯托克斯 和他们的数学方程

陈关荣



日常生活中，起伏的波浪、湍急的气流都会对我们的出行工具如飞机和轮船产生影响。数学家和物理学家们认为无论是风还是湍流，都可以通过求解一个方程来对其影响进行解释和预测。

那就是千禧年大奖难题之一——纳维 - 斯托克斯方程



【一】

1998年，美国投资咨询与矿业金融大咖兰登·克雷（Landon T. Clay）捐助成立了克雷数学研究所。这间非盈利私立研究所在2000年5月24日宣布设置“千禧年数学大奖”，七大数学难题每项的奖金为一百万美元。其中，第四道难题是要证明流体动力学中最重要的“纳维 - 斯托克斯方程”（Navier-Stokes equation）是否有解且为唯一。这则新闻把一个艰深数学问题及其称谓广为普及，甚至传播到数学领域之外的大庭广众。

纳维 - 斯托克斯方程是描述粘性不可压缩流体动量守恒的运动方程组。该方程在不同条件下具有不同的形式。它在三维空间的一般向量表达式包括简单的线性质量守恒方程 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 和复杂的非线性动量守恒方程

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \cdot \nabla)v = F - \nabla p + \mu \Delta v,$$

其中 v 为流体速度向量, F 为单位体积流体所受外力, p

为流体各向同性压力, ρ 为流体密度, μ 为动力粘性系数,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ 为梯度算子, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为拉普

拉斯算子。

纳维 - 斯托克斯方程的发展经历了一个漫长的过程：

1775 年, 欧拉在论文“流体运动的一般原理”(Principes généraux du mouvement des fluides) 中根据理想无粘性不可压缩流体所受外力时的动量变化推导出了一组微分方程式。

1821 年, 克劳德 - 路易·纳维 (Claude-Louis Navier) 推广了欧拉方程, 考虑到流体内部分子之间相互作用力所产生的粘性, 特别是在靠边界层的粘性对流体显著影响, 建立了一个不可压缩流体动力平衡和运动基本方程式。

1827 年, 柯西在欧拉方程中引入流体微团应力张量的概念, 推导出一个“柯西动量方程”, 准确地描述了流体运动不同于固体运动的基本规律。

1831 年, 泊松建立了一个可压缩流体的运动方程。

1845 年, 乔治·斯托克斯 (George G. Stokes) 在纳维方程的基础上推导出了带常数粘性的不可压缩流体的动量守恒运动方程式, 也就是现在著名的“纳维 - 斯托克斯方程”。

在这近百年的接力研究过程中, 不少数学家和物理学家都在多个相关问题上作出过不同形式和不同程度的贡献, 包括在非粘性流体数学分析方面的约翰·伯努利、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯、高斯、圣维南 (Saint-Venant) 以及带粘性流体和湍流方面的雷诺 (Osborne Reynolds) 和泰勒 (Geoffrey I. Taylor), 等等。

今天, 纳维 - 斯托克斯方程解的存在唯一性和许多特征 (例如光滑性) 尚待证明。1934 年, 法国数学家让 - 勒雷 (Jean Leray) 证明了方程在某种意义上弱解的存在。目前已知方程有一百多个特解, 但一般解只能借助于计算机求数值近似。1999 年, 美国数学家斯梅尔在题为“下一个世纪的数学问题”(Mathematical problems for the next century) 的文章中也把纳维 - 斯托克斯方程列为现代数学尚待解决的 18 个极大难题之一。

【二】

纳维是法国工程师与物理学家, 他的主要贡献在力学领域。

纳维的父亲克劳德 - 伯纳德 (Claude-Bernard Navier) 是个律师, 在法国大革命时期是巴黎国民议会一位议员。父亲在 1793 年去世后, 母亲珍妮 - 玛

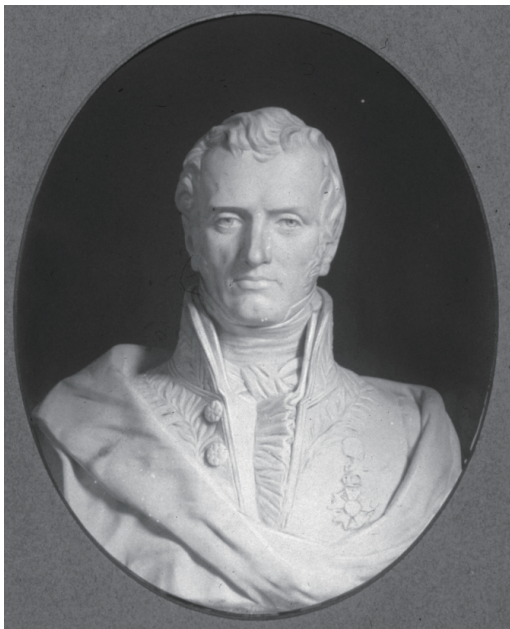


图 1. 纳维 (1785 年 2 月 10 日 - 1836 年 8 月 21 日)

丽自己回归老家沙隆，把纳维留在巴黎由叔公、数学家和土木工程师高西 (Émiland Gauthey) 负责教育培养。当年，高西在桥梁公路学校兼职任教，并于 1791 年被政府任命为桥梁与公路建筑集团的总督导。叔公是少年纳维心目中的模范榜样，让他立志将来当一个土木工程师。

1802 年，17 岁的纳维进入巴黎综合理工学院就读。纳维的入学成绩几乎排在最低端，但他后来十分努力，一年后就进入了前十名优等生行列。在理工学院，纳维修读了数学家傅立叶主讲的数学分析课程。纳维学习用功、思维敏捷，深得傅立叶教授的喜悦。后来，两人成为终生挚友。1804 年，纳维以优等生资格从理工学院毕业。1806 年，叔公高西去世，建筑集团邀请纳维去整理他留下的丰富文献记录和研究资料。在接下来的十多年里，纳维编辑了他叔公的手稿，主要是一些传统经验方法在土木工程中的多种应用，其中也加上了自己理论力学研究的一些分析结果。1813 年，纳维为叔公出了新版的《桥梁特性》(*Traité des ponts*) 以及为法国著名水力学工程师贝利多尔 (Bernard-Forest de Bélidor) 出了

新版的《工程手册》。

1819 年，纳维应聘在桥梁公路学校讲授应用力学课程。在那里，纳维对传统的力学课程教学大纲做了一次彻底的改革，增加了大量的物理学和数学分析内容。

1820 年代初期，纳维与在巴黎综合理工学院任教的数学家柯西和拉梅 (Gabriel Lamé) 一起建立了力学中的弹性基本理论。1821 年，纳维推导出一条新的弹性理论数学公式，第一次获得了具有足够精确度的弹性力计算结果。

1823 年，纳维受政府委托前往英格兰和苏格兰，去了解链式悬索桥的建设情况。事后他发表了一份著名的调查报告，其中提出了桥梁史上第一个悬索桥理论。这一成绩让他在 1824 年获选为法国科学院院士。不过，纳维的科学研究和工程实践也并非一帆风顺。1824 年，纳维在主持荣军院吊桥 (Pont des Invalides) 设计时，在计算中没有留出足够的安全余量，导致桥梁开裂并最后被拆除。当时指控不断，他因而受到了政府委员会的公开问责，认为他的设计过分依赖于物理数学而不是工程经验。

1826 年，纳维出版了《桥梁与道路学院课程总结》(*Résumé des Leçons Données à l'École des Ponts et Chaussées*)，文中论证了弹性模量是材料的一个基本属性，只和物体的材质有关而与其结构几何形状无关。这项重要成果让他成为结构分析理论的奠基人之一。

1828 年，纳维和泊松在《化学与物理年鉴》(*Annales de Chimie et de Physique*) 杂志上发生了关于弹性理论的争论。不过，因为两者都基于相同的分子假说，这场辩论无果而终。

1830 年 7 月，法国爆发了“七月革命”。国王查理十世逃离法国，由波旁王



朝国王菲利普一世继任。这事件让爱国者数学家柯西大为震惊。柯西留下了家人，独自离开巴黎到了瑞士，在弗里堡待了一段短暂时间。在那里，他作了一个重大决定，拒绝宣誓效忠新政权。他因此失去了在巴黎的所有职位，除了不需要宣誓的科学院院士资格。1831年，柯西前住意大利都灵，随后接受了撒丁岛国王的邀请，担任专门为他设立的理论物理学教授职位。1831年，纳维接替了柯西在巴黎综合理工学院的职位，担任微积分及力学教授。

1836年8月21日，纳维在巴黎去世，享年51岁。他的名字和其他71位法国名人一起，被镌刻在巴黎埃菲尔铁塔上。

【三】

斯托克斯于1819年8月13日出生在爱尔兰北部斯莱戈郡史格林教区，父亲加布里埃尔（Gabriel Stokes）是教区长，母亲伊丽莎白（Elizabeth Haughton）来自另一位教区长家庭。斯托克斯在家中八个孩子中最小，三个哥哥长大后都成为了牧师。

斯托克斯从小接受家教，到1832年13岁时才被送到都柏林一所学校去接受正规教育。在学校里，斯托克斯显示出非凡的几何学观察和推证能力。三年后，斯托克斯到了英国布里斯托尔学院学习，该学院院长是位数学家，是斯托克斯哥哥在剑桥大学的同学。院长对斯托克斯的数学天分非常惊讶，力劝他到剑桥深造。1837年，斯托克斯获得奖学金进入了剑桥大学彭布罗克学院就读。从此之后，他终其一生都未离开过该学院。

在剑桥，斯托克斯得到了数学家霍普金斯（William Hopkins）的喜爱和特别指导。1841年，斯托克斯以数学第一名荣誉生（Senior Wrangler）毕业并获史密斯奖。学院马上提供了他一个研究员职位（Master of Pembroke College）。在霍普金斯建议和指导下，斯托克斯开始流体动力学方面的研究。

斯托克斯在1842年和1843年相继发表了两篇论文“不可压缩流体的稳态运动”（On the steady motion of incompressible fluids）和“关于流体运动的一些研究”（On some cases of fluid motion）。之后，他进一步考虑有黏性流体的运动，并于1845年发表了论文“论有内部摩擦力流体之运动”（On the theories of the internal friction of fluids in motion）。在发表此论文之前，斯托克斯发现纳维早已在1822年写下了相同的方程式，不过其结论带有推测性，而斯托克斯则是基于不同的假设条件下用严格的数学理论推导出该方程式。虽然纳维在先，斯托克斯再三考虑之后还是发表了该论文。此举厥功至伟，文中严格建立起来的方程式就是千禧难题“纳维-斯托克斯方程”。

1846年，斯托克斯在英国科学促进会作了题为“流体动力学最新研究报告”

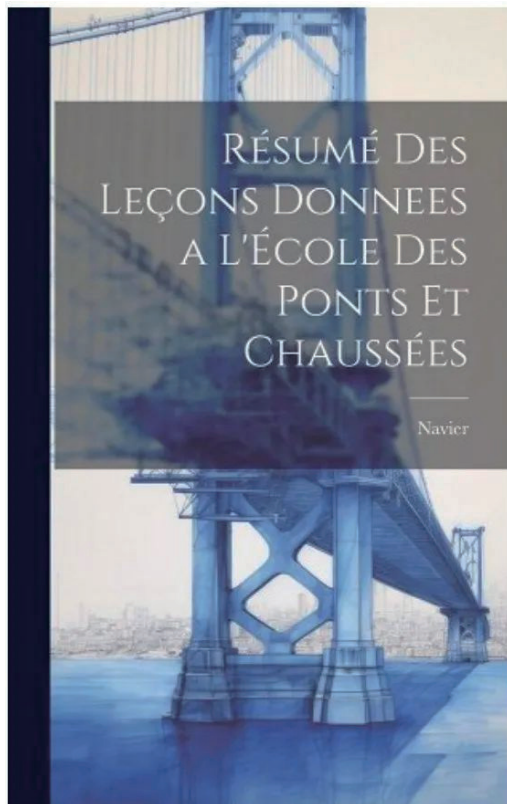


图2. 纳维的《桥梁与道路学院课程总结》



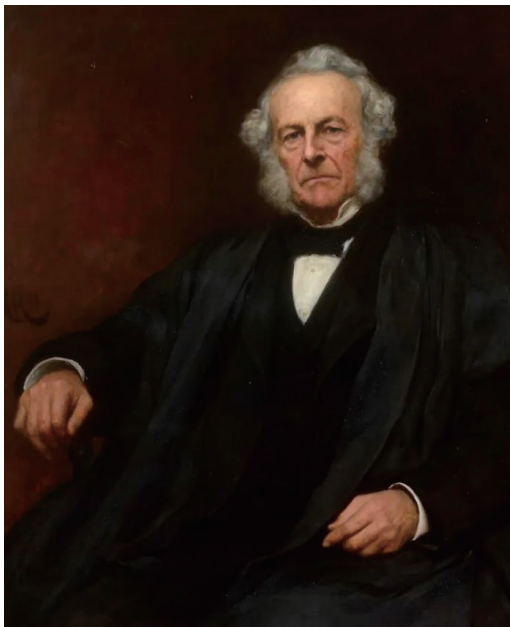


图3. 乔治·斯托克斯肖像
(Alice Power 绘, 英国皇家学会存展)

(Report on recent researches in hydrodynamics) 的著名演讲, 一时好评如潮, 之后各项荣誉接踵而至。

1847年, 斯托克斯在数学复变函数积分和无穷级数分析中有一个有趣的发现: 他描述了两个独立函数的线性组合曲线(“斯托克斯曲线”)在渐近变化过程中当变量的模越过某个阈值(“斯托克斯界线”)时会出现不连续性, 后人称之为“斯托克斯现象”。

1847年, 斯托克斯参与了对英国迪桥(Dee Bridge)坍塌灾难的调查。他被委任为皇家委员会成员, 对移动机车在大桥上的压力作了详尽计算和分析, 确定了主要原因是火车重量超过了桥梁铸铁的承载能力。事后, 他还被任命为负责研究风压对建筑结构影响的皇家委员会成员。

1849年, 他在《剑桥哲学学会汇刊》发表了一篇题为“衍射动力学理论”(The dynamical theory of diffraction)的长文, 证明了光的偏振面是垂直于传播方向的。同年, 他还发表了一篇关于大地测量的重要论文“关于地球表面重力的变化”(On the variation of gravity at the surface of the earth), 指出地表重力的测量并不依赖于地球内部的性质。同年, 他接受了位于伦敦的政府矿业学院物理学教授一职。

1849年, 三十而立的斯托克斯获剑桥卢卡斯数学教授席位, 1851年被选为英国皇家学会院士, 1854年出任皇家学会秘书, 1885-1890年出任皇家学会院长。他是历史上除了牛顿以外唯一曾获英国皇家学会秘书、院长以及卢卡斯数学讲座教授三个头衔的人。

1850年, 斯托克斯开始尝试考察过滤光(filtered light)。他让阳光穿过蓝色玻璃, 然后将光束照射到黄色醌溶液中, 以此产生强烈的黄色照明。斯托克斯对不同化合物的溶液进行了相同的实验, 但发现只有一些化合物显示出与原始光束不同的颜色。

1851年, 斯托克斯对德裔英国天文学家赫歇尔(William Herschel)在1845年报告的关于奎宁硫酸盐无色透明溶液表面在光照下会产生蓝色闪光的现象产生了极大兴趣。他亲自做了实验, 发现蓝色闪光是由奎宁溶液吸收了不可见的紫外线而引起的。他将这种光命名为“荧光”。后来他还发现, 石英棱镜而不是玻璃棱镜可用于研究光谱的紫外线部分, 从而确定了玻璃会吸收紫外线。他认为这些材料具有将不可见的紫外线辐射转化为波长较长的可见光的能力。这一材料特性被称为“斯托克斯平移”(Stokes shift), 是拉曼散射(Raman scattering)的基础。研究中, 他还引进了描述光偏振状态的“斯托克斯参数”。翌年, 斯托克斯把这项极其重要的研究成果以“论光折射系数的变化”(On the change of the refrangibility of light)为题发表在《英国皇家学会哲学汇刊》。同年, 他因此项成果荣获英国皇家学会的拉姆福德奖章(Rumford Medal)。

1851年, 斯托克斯在粘性流体运动的研究工作中计算了球体在粘性介质

中下落的终端速度,得到了著名的“斯托克斯定律”(Stokes law)。后来,厘米-克-秒系统中的粘度单位被命名为“斯托克斯”。

当年,斯托克斯还探讨了流体内部摩擦力对单摆运动的影响。他的研究成果是流体动力学的一个新里程碑,对一些复杂的自然现象如空中云的飘浮和水中浪的波动等作出了合理的力学解释,并对涉及水在河沟和管道中的流动以及船身在水中的表面阻力等应用设计提供了技术参考。他也曾对声学做过研究,包括风对声音强度影响的分析。

1857年,38岁功成名就的斯托克斯和剑桥阿玛天文台一位天文学家罗宾逊(Thomas R. Robinson)的女儿苏珊娜(Mary Susanna Robinson)结了婚。新婚夫妇搬进了Lensfield Cottage,在那里斯托克斯还建立了一个小小实验室。夫妇俩养育有五个子女并在那里度过了余生。婚后,斯托克斯在学校和政府部门担任了较多的行政职务,并且倾向于更为实验性而不是理论性的研究。

1862年,斯托克斯在英国科学促进会作了一个题为“论电光的长光谱”(On the long spectrum of electric light)的著名演讲,报告了从一串圆盘双重反射或透射的光强度变化的实验分析结果。该报告随后发表在《英国皇家学会哲学汇刊》。

斯托克斯在化学领域也有过一些研究和贡献。他和英国科学家、英国科学促进会创始人哈考特(William V. Harcourt)合作,研究了各种玻璃的化学成分与光学性能之间的关系和透明度。他还和德国物理及化学家霍普-塞勒(E. Felix I. Hoppe-Seyler)合作,发现了血红蛋白具有氧运输功能,并显示了血红蛋白溶液通过气体时所产生的颜色变化。

1869年,斯托克斯被选为英国科学促进协会主席。

1877年,斯托克斯荣获德国哥廷根大学颁发高斯奖章。

1880年代初期,斯托克斯和英国物理学家克鲁克斯(William Crookes)合作研究射线。当时他们认为阴极射线是带负电的粒子,但德国物理学家们则不以为然。1897年3月31日,斯托克斯写信给克鲁克斯,指出德国人所说的阴极射线Kathodenstrahlen“根本就不是射线,而是分子流”。一个月后,英国物理学家汤姆森(Joseph J. Thomson)宣布从实验中发现了电子并因之而获得了1906年的物理学诺贝尔奖。

1889年,斯托克斯被英国皇家册封为男爵。

1893年,斯托克斯荣获声誉崇高的英国皇家学会科普里奖章(Copley Medal)。物理学家开尔文勋爵(Lord Kelvin)在颁奖词中说:“五十二年前,他就开始了流体运动的主题研究,然后精巧地勾画出流体特性的完全真实本性,并以新颖的视角通过深入到物质的构成中去发现数学问题的极致之美”。记录表明,斯托克斯和开尔文勋爵有长达55年的友谊和合作,期间双方互助共进,各自成果累累。其中一件轶事说,1854年两人在一次讨论中斯托克斯推测可以用太阳光光谱中



图4. 斯托克斯出生地纪念牌匾

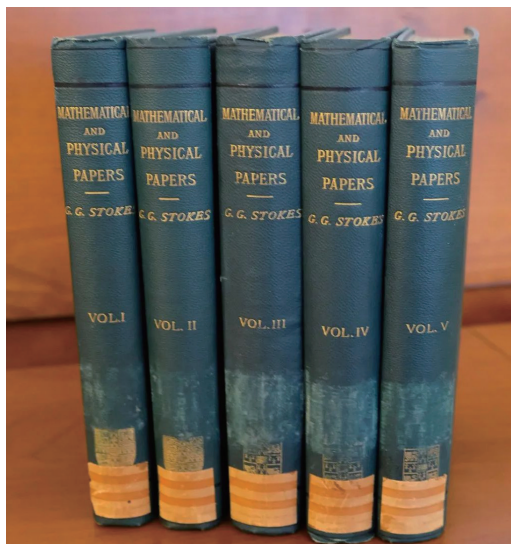


图 5. 斯托克斯数学和物理学论文集

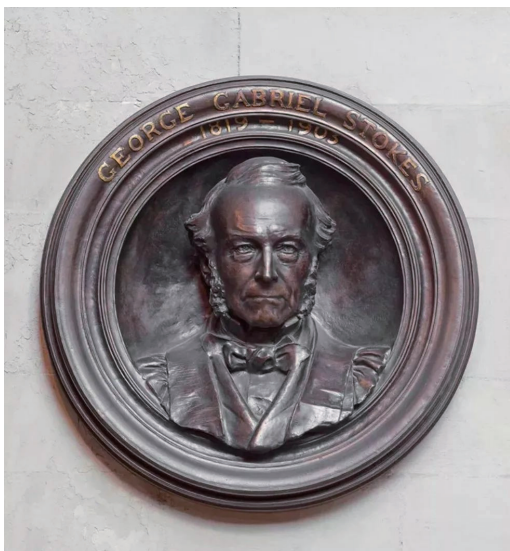


图 6. 乔治·斯托克斯纪念像

的弗朗霍夫线 (Fraunhofer lines) 来阐明太阳的化学成分。但由于他没有正式发表文章, 后来 1859 年德国物理学家基尔霍夫 (Gustav R. Kirchhoff) 和本生 (Robert W. Bunsen) 发表频谱分析原理时, 斯托克斯并不作声, 毫无意念去争夺这项成果。

1899 年, 斯托克斯因担任卢卡斯讲座教授 50 周年接受了剑桥大学的喜庆, 成为“禧年教授” (Professorial Jubilee)。

1901 年, 斯托克斯获普鲁士科学院颁发亥姆霍兹奖章。

1902 年, 斯托克斯获剑桥大学彭布罗克学院授予最高荣誉。同年, 他获挪威皇家弗雷德里克大学 (现为奥斯陆大学) 授予荣誉数学博士学位。之前, 斯托克斯还获得过英国剑桥、牛津、爱丁堡、格拉斯哥、阿伯丁和爱尔兰都柏林大学的荣誉博士学位。

1903 年 2 月 1 日, 斯托克斯在剑桥 Lensfield Cottage 去世, 享年 84 岁。他被葬于剑桥的 Mill Road 坟场。为了纪念斯托克斯, 后人在他的出生地矗立了一块牌匾。

斯托克斯为人品性谦和, 生活简朴, 是个虔诚教徒。他毕生对科学与信仰之间的联系非常感兴趣, 并积极参与创造论与进化论的各种争论。1885 年, 他开始担任维多利亚研究所所长职务直至去世。该研究所探索宗教教义与科学发现之间的关系。

斯托克斯的全部数学和物理学论文经整理后分五卷出版。前三卷是斯托克斯于 1880 年、1883 年和 1891 年亲自编辑的, 后两卷则是在斯托克斯去世后由爱尔兰裔英国物理学家和数学家拉莫尔 (Joseph Larmor) 于 1905 年完成的。

回顾十九世纪中叶, 剑桥是世界学术界的数学物理中心, 成绩巨大、声誉斐然。斯托克斯和麦克斯韦以及开尔文勋爵一起, 被誉为是对剑桥数学物理中心做出了最重要学术贡献的“自然哲学家三人组” (The Trio of Natural Philosophers), 流芳百世。



作者简介:

陈关荣, 香港城市大学电机工程系讲座教授, 欧洲科学院院士和发展中国家科学院院士。