



我們生活在複雜而又簡單的小世界裡

陳關榮¹

摘要

本文討論了現實社會網路中的一些典型小世界現象，引進「六度分離」的概念並回顧其社會實驗的歷史；說明數學圖論如何用於表述和刻畫小世界網路的兩個主要特徵，即平均距離短和群集係數大的兩個指標；介紹小世界網路的兩個經典數學模型，即瓦茨－斯特羅加茨模型（Watts–Strogatz model, WS model）和紐曼－瓦茨模型（Newman–Watts model, NW model）；最後詳細描述兩個有趣的真實小世界社會網路例子：美國好萊塢電影明星培根的演員網路和筆者本人與著名數學家歐拉及高斯的十代師徒承傳關係，驗證了全文的結論：我們的確生活在複雜而又簡單的小世界裡。

關鍵詞：小世界網路、社會網路、圖論、六度分離、數學家師徒家譜

¹ 香港城市大學電機工程學系講座教授（通訊作者 / eegchen@cityu.edu.hk）



We Live in a Complex and Yet Small World

Guanrong Chen¹

Keywords:

small-world network, social network, graph theory, six degrees of separation, mathematical genealogy

Author:

¹ Chair Professor, Department of Electrical Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong. (Corresponding Author / eegchen@cityu.edu.hk)

Article received July 22, 2023;
Accepted July 25, 2023.

ABSTRACT

This essay discusses some typical small-world phenomena in real social networks; introduces the concept of “six degrees of separation” and reviews the history of its social experiments; explains how mathematical graph theory is used to represent and describe the two main characteristics of small-world networks, that is, the two indicators of short average distance and large clustering coefficient; introduces two classic mathematical models of small-world networks, namely the Watts–Strogatz model (WS model) and the Newman–Watts model (NW model); finally, presents two interesting examples of real small-world networks: the actors network of the American Hollywood movie star Bacon and the ten-generation PhD advisor-student relationships between the author and the famous mathematicians Euler and Gauss, verifying the conclusion of the article: we do live in a complex yet simple small world.

人類社會很大，也很複雜。但是，你常常會發現，其中許多複雜性是由一些簡單規則決定的。

你在生活中可能會有過這樣一種體驗，就是當你 and 一位全新認識的朋友談及某個人的時候，對方十分驚訝地回應：「啊，你也認識他？這世界真小！」

這世界真的很小嗎？你通常並不這樣認為。世界上人很多，約有 80 億，而根據牛津大學人類學家羅賓·鄧巴（Robin I. M. Dunbar, 1947-）的研究，平均來說每個成年人通常只維繫著不足 150 個聯絡人。這個「鄧巴數」相對於 80 億來說可以忽略不計。因此，比如說，你我互相認識，你在臺灣而我在香港，現在我說我在阿根廷隨機地找出一個人來，問你和這個人之間要通過多少個兩兩互相認識的中間人才會連接起來？那麼你會猜測至少需要十來二十個中間人吧。根據一般人的生活經驗，這是個合理的估計。但是，如果我告訴你，我以前在美國教書時有一個阿根廷學生畢業後回國當教授了，你馬上就知道只需通過我，你立即就被連接到阿根廷，從而便會意識到上面的估計過於保守了。

事實上，你這個感覺是對的。

早在 1929 年，匈牙利作家弗裡吉斯·卡林蒂（Frigyes Karinthy, 1887-1938）在《所有事物都是不同的》（*Everything is different*）一書中題為“Chain-Links”的章節裡寫道：

地球從來都沒有像現在這樣小。……我們可以從地球上的 15 億居民中選出任何一個人——不管是什麼人，在什麼地方——他都能夠向我們打賭，他只需要不超過 5 個中間人就可以通過「熟人網路」連接到任意指定的另一個人。（Karinthy, 1929, p. 57）

這就是後來周知的「六度分離」（six degrees of separation）原理。任意兩個互相認識的熟人之間定義為一度分離。故此，兩個人之間如果有五個其他人，這兩個人之間就有六個連接關係，即彼此為六度分離。

這裡，卡林蒂已經提及了小世界（Earth is tiny）和熟人網路（network of personal acquaintances）。不過，卡林蒂的這段話是經驗性的，他和他的同事都沒有做過社會調查或人群實驗去驗證他的論斷。

真正以社會實驗去驗證六度分離原理的是，哈佛大學畢業並留校任教的社會心理學教授斯坦利·米爾格拉姆（Stanley Milgram, 1933-1984）。1967 年，米爾格拉姆在內布拉斯加州奧馬哈市（Omaha, Nebraska）和堪薩斯州威奇托市（Wichita, Kansas）聯絡了 160 名隨機選定的遊戲參與者。他給每個人發了一個包裹，上面寫著最終收件人的姓名和地址，那是在波士頓市匿稱為“Mr. Jacobs”的一名股票經紀人。米爾格拉姆讓實驗參與者們將包裹轉發給他們認為有可能進一步把包裹傳遞到收件人的某個熟人朋友。米爾格拉姆通過所有中間傳遞人寄回的確證明信片來跟蹤每個郵件的轉發情況。雖然最後很多包裹不知寄到哪裡去了，但是成功的案例中有一些只用了四天時間就被轉寄到收件人手中，期間只通過 2 個兩兩相識的熟人。其它例子也有多達 10 個中間人的。米爾格拉姆注意到，所有結果的中位數是 5 個中間人，即六度分離。米爾格拉姆在 1967 年 5 月的《今日心理學》（*Psychology Today*）雜誌創刊號上發文報告了他這個「小世界實驗」的結果（Milgram, 1967），讓六度分離原理名噪一時。他後來發表了一份加強版的調查報告（Travers & Milgram, 1969）。

當然，在有高速電腦、互聯網和大資料

的今天，你對米爾格拉姆當年的小規模社會實驗是不會滿意的，對他的結論也會存疑。和你的想法一樣，網路科學家們早已對那令人疑惑的六度分離原理進行了多種大規模的實踐檢驗。

2003年，時為哥倫比亞大學社會學教授的鄧肯·瓦茨（Duncan J. Watts, 1971-）和他的研究小組首次大規模地重複了米爾格拉姆的社會實驗。他們使用了包括13個國家的6萬多個電子郵箱位址並設定了18個目標使用者來進行電子郵件傳遞實驗。結果，他們發現郵件通過5-7次傳遞便分別到達了目標使用者，從而極有說服力地印證了六度分離原理（Dodds et al., 2003）。

2011年，Facebook資料團隊宣布，他們根據對7.21億活躍Facebook用戶的690億條好友連接的調查，發現使用者平均分離數目僅為4.7（Ugander et al., 2011）。顯然，這個數字比6小多了。

2016年，Facebook資料團隊再次宣布，新的結果平均分離數目下降到3.74（Edunov et al., 2016）。它表明我們的世界變得越來越小了，也就是說人與人之間的聯繫變得越來越緊密了。這無疑是High-Tech的功勞。

上面這些有趣的社會調查和實驗資料可以釐清，日常生活經常基於小規模和局部觀測而獲得許多模糊概念和膚淺認識。但是，想要進一步清晰地描述並深刻地研究這些小世界現象及其特性，我們還需借助數學圖論來建立相應的複雜網路數學模型。

在圖論中，一個人可以用一個「節點」（node）來表示，而兩個互相認識的人之間的關係可以用一條「連邊」（edge）來表示。圖論中的節點是沒有大小的，連邊也不分長

短，每條連邊的長度都定義為1；也就是說，兩個相連的節點之間的距離（distance）定義為1。這樣，六度分離就可以用具有7個節點和6條連邊組成的鏈形圖來表示，其兩個端節點的距離就等於6，刻畫了六度分離。在一個具有許多節點和許多條連邊組成的圖（或者網路）中，任意兩個節點的距離以連接它們之間最短的路徑來計算。由於任意兩個節點之間都有一個確定的距離，一個網路所有這樣的距離的平均值稱為網路的平均距離（average distance）。而一個網路平均距離短的話，任意兩個節點便相距不遠。因此，「平均距離短」是小世界網路的一個主要特徵。

描述小世界網路的另一個重要指標是「群集係數」（clustering coefficient），它是一個節點的所有鄰居節點之間互相連接的比例數值。打個比方說，如果你的所有熟人朋友彼此之間也都互相認識，那麼你的群集係數就等於1（即100%），這時你這個節點和你的所有鄰居節點一起組成一個全連接的子網路；如果你的所有熟人朋友彼此之間都互相不認識，那麼你的群集係數就等於0，這時你這個節點和你的所有鄰居節點一起組成一個以你為中心的星形子網路。一般情況下，群集係數落在0和1之間；該係數越大（即越接近1），節點聚集得就越緊密，彼此相距不遠。因此，「群集係數大」是小世界網路的另一個主要特徵。

歷史上第一個具體明確的小世界網路數學模型是1998年時為康奈爾（Cornell）大學應用數學博士研究生的鄧肯·瓦茨在導師史蒂文·斯托加茨（Steven H. Strogatz, 1959-）指導下發表在《自然》（Nature）雜誌上的一篇文章中建立的，稱為WS小世界網路模型（Watts & Strogatz, 1998）。該

模型在具有較大群集係數的近鄰連接規則網路（例如環狀網路，見圖 1a）的基礎上，把所有可能的節點對按某種規律以相同的概率刪除連邊然後把該連邊在網路中作隨機重連（見圖 1b）。由於隨機性，必然出現一些新的遠端連接邊，把兩兩原來相離較遠的節點對連接起來。正是這些遠端連接邊把整個網路的平均距離大大縮短了，讓它變成了一個「小世界」。

1999 年，在康奈爾大學物理系工作的馬克·紐曼（Mark E. J. Newman）和博士研究生瓦茨一起建立了另一個小世界模型，稱為 NW 小世界網路模型（Newman & Watts, 1999）。該模型同樣在具有較大群集係數的最近鄰接規則網路（見圖 1a）的基礎上，簡單地以相同的概率增加一些連接邊（見圖 1c）。由於隨機性，必然出現一些遠端連接邊，把一些相離較遠的節點對連接起來。同樣，這些新的遠端連接邊把整個網路的平均距離大大縮短了，也讓它變成了一個「小世界」。

明白了小世界網路的意思後，你會很容易發現，在我們現實生活中有許多這樣的例子。

我這裡介紹一個有趣的例子，主角是美國好萊塢電影明星凱文·培根（Kevin N. Bacon, 1958-）。培根在 1994 年 1 月接受《首映》（*Premiere*）雜誌採訪時提到，他「曾與好萊塢的每個人或與他們合作過的那些人都有過合作」。例如，他和湯姆·克魯斯（Tom Cruise, 1962-）合演過一部電影“A Few Good Men”，因此他倆的「合作距離」為 1。現在，我們給克魯斯一個「培根數」為 1。培根和瑪麗蓮·夢露（Marilyn Monroe, 1926-1962）屬不同時代的人，他倆沒有合演過電影。但是，培根和羅伯特·瓦格納（Robert J. Wagner, 1930-）合演過電影“Wild Things”，而瓦格納和夢露合演過電影“Let’s Make It Legal”。因此，瓦格納的培根數為 1 而夢露的培根數為 2。老一輩的讀者都會記得滑稽的默劇演員查理·卓別林（Charlie S. Chaplin, 1889-1977），他和巴里·諾頓（Barry Norton, 1905-1956）合演過電影“Monsieur Verdoux”，而諾頓又和瓦格納合演過電影“What Price Glory”。於是諾頓的培根數為 2 而卓別林的培根數為 3。如此類推，幾乎所有的好萊塢演員都有一個培根數。2023 年 1 月 1 日網路上的統計數字表明

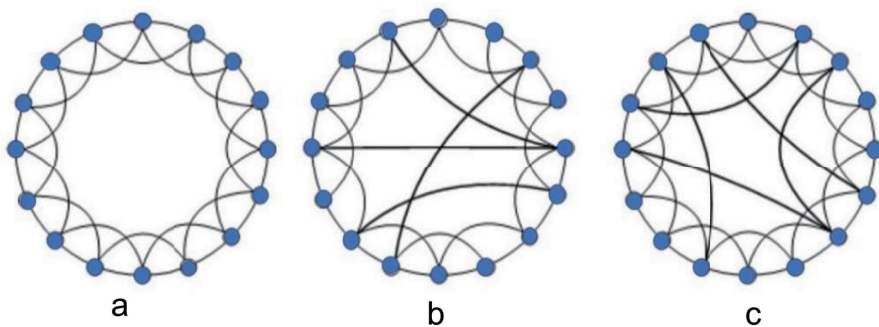


圖 1

近鄰連接規則網路、WS 和 NW 小世界網路模型示意圖

註：作者自行繪製。

(見圖 2) (Reynolds, 2023)，在全球接受調查的 1,119,819 位男女電影演員中，培根數為 1 的共有 2,054 人，培根數為 2 的共有 206,538 人，培根數為 3 的共有 636,793 人，等等，平均值為 3.095。這一電影界的小世界現象被稱為「培根六度分離」。

最後，我引用自己一個特別的學術關係網絡作為實際例子，向讀者描繪科學界中的某些小世界現象。在數學領域裡，萊昂哈德·歐拉 (Leonhard Euler, 1707–1783) 和卡爾·高斯 (J. Carl Friedrich Gauss, 1777–1855) 是眾所周知的 18 世紀兩位傑出著名的數學家，他們屬於歷史上最偉大的數學家行列。我本人於 1987 年在美國 Texas A&M University 獲得應用數學博士學位。和其他人一樣，我自己當然不會想到與幾乎三百年前的這兩位數學大師有什麼學術關聯。2007 年，我從《美國數

學學會通訊》(Notices of the AMS) 中看到一篇評論，其中介紹了一個關於全球數學家的學術家譜調查記錄專案“Mathematical genealogy project” (Department of Mathematics, North Dakota State University, n.d.)。在那裡，我從自己的名字 (Guanrong Chen) 所在網頁開始，立即找到了我的博士導師的名字 (Charles K. Chui)，然後從他的名字所在網頁又找到他的兩位共同博士導師的名字 (Jacob Korevaar 和 Simon Hellerstein)，如此一直往前查找，最後竟然發現有兩個師生關係的家譜分支，其中一個分支追溯到歐拉而另一個分支追溯到高斯 (見圖 3)。這兩個分支的分叉點是數學家 Albert Edrei (1914–1998)，他有兩位共同博士導師 (見圖 3)。也就是說，我發現自己原來是歐拉和高斯的第十代博士學生。啊，這個世界真小！

Kevin Bacon Number	# of People
0	1
1	2,054
2	206,538
3	636,793
4	238,520
5	30,365
6	4,578
7	785
8	153
9	28
10	4

Total number of linkable actors: 1,119,819
 Weighted total of linkable actors: 3,465,893
 Average Kevin Bacon number: 3.095

圖 2
培根數表 (2023 年 1 月 1 日)

註：Bacon numbers: Kevin Bacon, by P. Reynolds, 2023 (<https://oracleofbacon.org/onecenter.php?who=Kevin+Bacon>).

歐拉 L. Euler → J.-L. Lagrange → J.-B. Fourier → G. P. L. Dirichlet → L. Kronecker
 → M. Lerch → M. Plancherel → A. Edrei → S. Hellerstein → C. K. Chui → G. R. Chen

高斯 C. F. Gauss → F. W. Bessel → H. F. Scherk → C. C. Kummer → H. A. Schwarz →
 → L. Fejer → G. Polya → A. Edrei → S. Hellerstein → C. K. Chui → G. R. Chen

圖 3

筆者 (G. R. Chen) 的博士師生關係家譜

註：作者自行繪製。

故事講到這裡，其實讀者你早就知道我們都生活在一個小世界裡，因為你記得唐朝詩人王勃（650–676）的著名詩句：「海內存知己，天涯若比鄰」，對吧？

參考文獻

- Department of Mathematics, North Dakota State University. (n.d.). *Mathematics Genealogy Project*. The Mathematical Genealogy Project. <https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>
- Dodds, P., Muhamad, R., & Watts, D. J. (2003). An experimental study of search in global social networks. *Science*, 301(5634): 827–829. <https://doi.org/10.1126/science.1081058>
- Edunov, S., Bhagat, S., Burke, M., Diuk, C., & Filiz, I. O. (2016, February 4). *Three and a half degrees of separation*. Meta Research Website. <https://research.facebook.com/blog/2016/2/three-and-a-half-degrees-of-separation/>
- Frigyes, K. (1929). *Minden másképpen van (Everything is different)*. Atheneum Irodalmi és Nyomdai R.-T.
- Milgram, S. (1967). The small world problem. *Psychology Today*, 1(1), 60–67.
- Newman, M. E. J., & Watts, D. J. (1999). Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E*, 60(6), 7332–7342,

<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.60.7332>

- Reynolds, P. (2023, January 1). *Bacon numbers: Kevin Bacon*. The Oracle of Bacon. <https://oracleofbacon.org/onecenter.php?who=Kevin+Bacon>
- Travers, J., & Milgram, S. (1969). An experimental study of the small world problem. *Sociometry*, 32(4), 425–443. <https://doi.org/10.2307/2786545>
- Ugander, J., Karrer, B., Backstrom, L., & Marlow, C. (2011). *The anatomy of the Facebook social graph*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/1111.4503v1>
- Watts, D. J., & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 393(6684), 440–442, <https://doi.org/10.1038/30918>