

哪里有数，哪里就有美。—— Proclus（希腊，410—485）

从圆周率 π 谈起

陈关荣

陈关荣，1981年获中山大学计算数学硕士学位，1987年获美国 Texas A&M 大学应用数学博士学位，在美国大学任教至 2000 年，后任香港城市大学讲座教授及混沌与复杂网络学术研究中心主任，2011 年获俄罗斯圣彼得堡国立大学荣誉博士学位及 Euler 金质奖章。

2010 年 9 月 17 日，在北京中国科学院思源楼报告厅内举行了华罗庚先生诞辰一百周年纪念大会。

我从小就知道华罗庚的名字。但真正对他有所了解，还是从 1962 年刚上初中时阅读了他当年为中学生写的一本数学小册子《从祖冲之的圆周率谈起》开始的。华罗庚先生的生平与贡献自然不必多说，在这里只谈谈从他这本小册子里学到的关于圆周率 π 的一点知识和后来逐渐知道更多关于 π 的一些趣事。



↑ 华罗庚（1910—1985）

传说华罗庚曾经讲过一个故事：从前有个教书先生，平日喜欢喝酒。一天，他把学生们关在教室里，要他们背诵圆周率，自己却提了一壶酒到山上的寺庙找老和尚对饮去了。先生回来后，考问学生有没有把圆周率背下来。有个学生就回应道：“山巅一寺一壶酒，尔乐苦煞吾，把酒吃，酒杀尔杀不死，乐尔乐”。先生开始很生气，以为学生是在讽刺他，但很快便意识到这其实是带浓厚乡音的普通话 3.1415926535897932384626，顿时转怒为喜，把这个学生着实称赞了一番。

众所周知，圆周率是一个圆的周长与直径之比，而且不论圆的大小，这个比值是常数，永远不变。圆周率的近似值 $\pi \approx 3.14$ 家喻户晓，关于它的文章和书籍更是多不胜数。由于希腊字母 π 和英文单词“pie”同音，1988 年 3 月 14 日由美国旧金山的科学探索馆（San Francisco Exploratorium）提议，

发起了每年这一天以吃“pie”来纪念和庆祝圆周率的校园活动。2009年3月11日，美国众议院还通过了一项决议，把3月14日正式确定为全国的“ π 日”（National Pi Day）。更有趣的是，麻省理工学院的招生办公室每年都把新生录取通知书留到“ π 日”才发送给新生。现在网络通信方便了，还有传闻说那里的工作人员安装了个计算机程序等到3月14日下午1时59分26秒才从网上把录取通知书向全世界发放出去，对应于 $\pi \approx 3.1415926$ 。说来奇巧，3月14日正好也是 Einstein 的生日。另外，因为 $22/7$ 是比 3.14 对 π 更为精确的近似，每年7月22日也被公认为“ π 近似日”。



↑ 每年7月22日是“ π 近似日”

圆周率 π 是一个不等于任何两个整数之比的实数，它在整数 3 之后再带上一个具有无限长度但又永远不循环的小数： $\pi \approx 3.1415926\dots$ 。尽管人类对 π 的认知可以追溯到远古，最先对 π 值进行系统严格的估算者应当首推古希腊科学家 Archimedes（公元前 287—前 212 年），他得出不等式 $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$ ，平均值就是 $\pi \approx 3.14\dots$ 。在我国，三国后期魏国人刘徽（生于公元 250 年左右）留下了宝贵数学遗产《九章算术注》和《海岛算经》，并创始和使用了“割圆术”即用圆的内接和外切正多边形来逼近圆的周长。割圆术为后来南北朝时期的数学家祖冲之（公元 429—500 年）的估算 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 提供了最基本的方法。此外，祖冲之还以很简单的分数形式给出了圆周率的约率 $\pi \approx 22/7$ 和密率 $\pi \approx 355/113$ 。

古人计算圆周率，一般都是用正多边形来逼近圆的。Archimedes 用正 96 边形逼近圆而得到 π 小数点后 3 位的精度，刘徽用正 3072 边形逼近圆也只能得到 π 小数点后 5 位的精度。由于这些计算方法效率极低，估算 π 的历史

进程十分缓慢。直到微积分问世以后，情况才大为改观。1706年，英国天文学家 John Machin 发现了一个简单的解析公式并用它来计算 π 达到了小数点后 100 位的精确度：

$$\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)。$$

微积分的出现，不但给出了许多关于 π 的解析估计，更大大地加快了其数值计算。且不说优雅漂亮的 Gregory-Leibniz 和差公式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

以及 Wallis 乘积公式

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \cdots = \frac{\pi}{2},$$

后来发现能够用来对 π 作快速近似计算的公式还有很多。1914年，自学成才的传奇印度数学家 Srinivasa Ramanujan 就曾经写下过 14 个关于 π 的无穷级数展开公式。电子计算机出现以后，人类大规模高精度的计算能力得到了无与伦比的飞跃，使得圆周率计算的进程突飞猛进，实现了计算 π 的（二进制）数字长度的一次又一次重大突破。1985年，美国数学家 Bill Gosper 用 Ramanujan 的一个公式计算圆周率精确到了小数点后 17500000 位。1994年，苏联裔美国数学家 David 和 Gregory Chudnovsky 兄弟在同一个公式的基础上计算 π 到了 4044000000 位。1995年以后，日本数学家金田康正（Yasumasa Kanada）及其团队更在世界上遥遥领先，在 2003 年把对 π 的计算提高到了 1.24 万亿位。这个纪录在 2010 年 1 月 8 日由法国一位程序员 Fabrice Bellard 打破。他改进了 Chudnovsky 兄弟的公式，用了 131 天在一部台式计算机上成功地把 π 计算到 2.7 万亿位。这个数字有多长呢？如果你平均用一秒钟来报出一个数字的话，那么需要 8.5 万年才能读完它的所有数字。厉害吧？可是，这个世界纪录到 8 月份就被打破了：日本工程师近藤茂（Shigeru Kondo）与美国西北大学计算机系的香港学生余智恒合作，把 π 值算到了 5 万亿位。谁知道，当欢呼声犹在耳际，9 月 17 日英国广播公司 BBC 又作出了惊人的报道，说雅虎科技公司的研究员、原香港科技大学毕业生施子和（Nicholas Tse-Wo Sze）采用“云计算”技术，利用 1000 台计算机同时计算，历时 23 天，将 π 计算到小数点后 2 千万亿位，为 8 个月前法国人 Bellard 记录的近一千倍。呵呵，这可不是只增加了大约一千个数位，而是由一千个、每个都有 2.7 万亿位长的数字连接起来。哇塞！施子和兴奋无比地向全世界宣布了他的计算结果，还说他发现了“ π 的小数点后第两千兆位是 0！”

你或许不以为然，说用计算机来计算不足为奇。那么，用人脑来进行计算和记忆就不容易了吧？如果我告诉你，说有人能正确无误地记住 π 的数值

从 3.14 开始一直到小数点后几万位数字，你会觉得匪夷所思吧？其实，多少年来一直有着凭人脑记忆来背诵 π 的数值的吉尼斯世界纪录（Guinness World Records），目前领先的是中国人吕超。2005 年 11 月 20 日，当时是西北农林科技大学研究生的吕超用了 24 小时零 4 分的时间，连续背诵出 π 的值到小数点后 67890 位。

读到这里，我知道你如果不是数学粉丝的话其实并不会特别激动：知道 $\pi \approx 3.14$ 就已经足够了，谁去关心它长长尾巴上的无穷多位数字呢？

说来也是，造物主有这么多东西可以创造，为什么偏偏造出这个神奇的 π 来，让许许多多的数学家和粉丝们两千多年来呕心沥血地去追寻不休呢？不过，我最近开始渐感惊讶，觉得造物主并不是一些人所想象的那么无聊。

你可能早已听说过， π 与地球上的许多河流有关：河流弯曲河道的曲线长度与河道首尾直线距离之比通常都接近于 3.14 —— 河道越是蜿蜒曲折，这个近似值就越好 —— 亚马逊河便是一个例子。最令我惊叹的是 2010 年 11 月《科学》杂志上报道的德国格丁根大学马克·普朗克动力学与自组织科学研究所和伯恩斯坦计算神经科学研究中心的科学家 Matthias Kaschube 及其团队的一项研究成果。他们说在相同哺乳类中的三种远亲动物婴猴（galago）、树鼩（tree shrew）和蒙眼貂（ferret）的大脑中发现，它们的视觉皮层的螺旋结构平均分布密度都是一样的，而且都落在 π 值 3.14 的 95% 置信区间之中。真的？这不会是巧合吧？虽然这个 3.14 不能与用计算机得到的两千万亿位数字相提并论，但对于理论生物学家来说，3.14 已经是一个令他们难以置信的超级精确度了。



↑ 婴猴 (galago)



↑ 树鼩 (tree shrew)



↑ 蒙眼貂 (ferret)

科学家们相信，今天的生物大脑都是经过漫长时间通过自组织演化过程而逐渐形成的，并且都具有某种最优的结构和功能。如果是这样的话，那些哺乳类动物大脑视觉皮层中基本螺旋结构分布都不约而同地呈现出以 3.14 为平均密度之特征，是不是自然进化的最优结果呢？不会是造物主在创世开始时，不经意地在它们的大脑中写下了那个神奇的数字 π 吧？