

哪裏有數, 哪裏就有美。 — Proclus (希臘, 西元 410-485 年)

## 從圓周率 $\pi$ 談起

陳關榮

(2010 年 11 月)

今年 9 月 17 日, 在北京中國科學院數學與系統科學研究院的思源樓報告廳內舉行了華羅庚先生誕辰 100 周年紀念大會。



(華羅庚, 1910-1985)

我從小就知道華羅庚的名字。但真正對他有所瞭解, 還是從 1962 年剛上初中時閱讀了他當年為中學生寫的一本數學小冊子《從祖沖之的圓周率談起》開始的。華羅庚先生的生平與貢獻自然不必多說, 在這裏只談談從他這本小冊子裏學到的關於圓周率  $\pi$  的一點知識和後來逐漸知道更多的關於  $\pi$  的一些趣事。

傳說華羅庚曾經講過一個故事: 從前有個教書先生, 平日喜歡喝酒。一天, 他把學生們關在教室裏, 要他們背誦圓周率, 自己卻提了一壺酒到山上的寺廟找老和尚對飲去了。先生回來後, 考問學生有沒有把圓周率背下來? 有個學生就回應道: “山巔一寺一壺酒, 爾樂苦煞吾, 把酒吃, 酒殺爾殺不死, 樂爾樂”。先生開始很生氣, 以為學生是在諷刺他, 但很快便意識到這其實是帶濃厚鄉音的普通話 3. 1415926535897932384626, 頓時轉怒為喜, 把這個學生著實稱讚了一番。

眾所周知, 圓周率是一個圓的周長與直徑之比, 而且不論圓的大小, 這個比值是常數, 永遠不變。圓周率的近似值  $\pi \approx 3.14$  家喻戶曉, 關於它的文章和書籍更是多不勝數。由於希臘字母  $\pi$  和英文單詞 pie 同音, 1988 年 3 月 14 日由美國三藩市的科學探索館 (San Francisco Exploratorium) 提議, 發起了每年這一天以吃 pie 來紀念和慶祝圓周率的校園活動。說來奇巧, 3 月 14 日正好也是愛因斯坦的

生日。2009年3月11日，美國眾議院還通過了一項決議，把3月14日正式確定為全國的“ $\pi$ 日”（National Pi Day）。更有趣的是，麻省理工學院的招生辦公室每年都把新生錄取通知書留到 $\pi$ 日才發送給新生。現在網絡通信方便了，還有傳聞說那裏的工作人員安裝了個電腦程式等到3月14日下午1時59分26秒才從網上把錄取通知向全世界發放出去，對應於 $\pi \approx 3.1415926$ 。另外，因為 $22/7$ 是比 $3.14$ 對 $\pi$ 更為精確的近似，每年7月22日也被公認為“ $\pi$ 近似日”。



（每年7月22日是“ $\pi$ 近似日”）

圓周率 $\pi$ 是一個不等於任何兩個整數之比的實數，它在整數3之後再帶上一個具有無限長度但又永遠不循環的小數： $\pi \approx 3.1415926\dots$ 。儘管人類對 $\pi$ 的認知可以追溯到遠古，最先對 $\pi$ 值進行系統嚴格的估算者應當首推古希臘科學家亞基米德（西元前287-212年），他得出不等式 $3+10/71 < \pi < 3+1/7$ ，平均值就是 $\pi \approx 3.14\dots$ 。在我國，三國後期魏國人劉徽（生於西元250年左右），留下了寶貴數學遺產《九章算術注》和《海島算經》，他創始並使用的“割圓術”（即用圓的內接和外切正多邊形來逼近圓的周長）為後來南北朝時期的數學家祖沖之（西元429-500年）的估算 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ （密率 $\pi \approx 355/113$ ）提供了最基本的方法。前面提到的 $\pi \approx 22/7$ ，就是祖沖之給出的圓周率的約率。

古人計算圓周率，一般都是用正多邊形來逼近圓的。亞基米德用正96邊形逼近圓而得到 $\pi$ 小數點後3位的精度，劉徽用正3072邊形逼近圓也只能得到 $\pi$ 小數點後5位的精度。由於這些計算方法效率極低，估算 $\pi$ 的歷史進程十分緩慢。直到微積分問世以後，情況才大為改觀。1706年，英國天文學家John Machin發現了一個簡單的解析公式並用它來計算 $\pi$ 達到了小數點後100位的精確度：

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} (1/5) - 4 \operatorname{arctg} (1/239)$$

微積分的出現，不但給出了許多關於 $\pi$ 的解析估計，更大大地加快了其數值計算。且不說優雅漂亮的Gregory-Leibniz和差公式

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

以及 Wallis 乘積公式

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots = \frac{\pi}{2}$$

後來發現能夠用來對  $\pi$  作快速近似計算的公式還有很多。1914 年，自學成才的傳奇印度數學家 Srinivasa Ramanujan 就曾經寫下過 14 個關於  $\pi$  的無窮級數展開公式。電腦出現以後，人類大規模高精度的計算能力得到了無以倫比的飛躍，使得圓周率計算的進程突飛猛進，實現了計算  $\pi$  的（二進制）數字長度的一次又一次的重大突破。1985 年，美國數學家 Bill Gosper 用 Ramanujan 的一個公式計算圓周率精確到了小數點後 17,500,000 位。1994 年，蘇聯裔美國數學家 David 和 Gregory Chudnovsky 兄弟在同一個公式的基礎上計算  $\pi$  到了 4,044,000,000 位。1995 以後，日本數學家金田康正（Yasumasa Kanada）及其團隊更在世界上遙遙領先，在 2003 年把對  $\pi$  的計算提高到了 1.24 萬億位。這個紀錄在今年 1 月 8 日由法國一位電腦軟件師 Fabrice Bellard 打破。他改進了 Chudnovsky 兄弟的公式，用了 131 天在一部臺式電腦上成功地把  $\pi$  計算到 2.7 萬億位。這個數字有多長呢？如果您平均用一秒鐘來報出一個數位的話，那麼您需要 8.5 萬年才能讀完它的所有數字。厲害吧？可是，這個世界紀錄到 8 月份就被打破了：日本工程師近藤茂（Shigeru Kondo）與美國西北大學電腦系的香港學生余智恒合作，把  $\pi$  值算到了 5 萬億位。誰知道，當歡呼聲猶在耳際，9 月 17 日英國廣播公司 BBC 又作出了驚人的報導，說 Yahoo 科技公司的研究員、原香港科技大學畢業生施子和（Nicholas Tse-Wo Sze）採用“雲計算”技術，利用 1000 台電腦同時計算，歷時 23 天，將  $\pi$  計算到小數點後 2 千萬億位，為 8 個月前法國人 Bellard 記錄的近一千倍。呵呵，這可不是只增加了大約一千個數位，而是由一千個、每個都有 2.7 萬億位元長的數字連接起來。No kidding! 施子和興奮無比地向全世界宣佈了他的計算結果，還說他發現了 “The two quadrillionth bit of  $\pi$  is 0!”

您或許不以為然，說用電腦來計算不足為奇。那麼，用人腦來進行計算和記憶就不容易了吧？如果我告訴您，說有人能正確無誤地記住  $\pi$  的數值從 3.14 開始一直到小數點後幾萬位數字，您會覺得匪夷所思吧？其實，多少年來一直有著憑人腦記憶來背誦的數值的吉尼斯世界紀錄（Guinness World Records），目前領先的是中國人呂超。2005 年 11 月 20 日，當時是西北農林科技大學研究生的呂超用了 24 小時零 4 分的時間，連續背誦出的值到小數點後 67890 位。

讀到這裏，我知道您如果不是數學粉絲的話其實並不會特別激動：知道  $\pi \approx 3.14$  就已經足夠了，誰去關心它長長尾巴上的無窮多位數字呢？

說來也是。造物主有這麼多東西可以創造，為什麼偏偏造出這個神奇的  $\pi$  來，讓許許多多的數學家和粉絲們兩千多年來嘔心瀝血地去追尋不休呢？我到最近才開始明白，原來造物主並不是像一些人所想像的那麼無聊。

你可能早已聽說過， $\pi$  與地球上的許多河流有關：河流彎曲河道的曲線長度與河道首尾直線距離之比通常都接近于 3.14 ——河道越是蜿蜒曲折，這個近似值就越好——亞馬遜河便是一個例子。最令我驚歎的是，今年 11 月《科學》雜誌上報導了德國哥廷根大學馬克-普朗克動力學與自組織科學研究所和伯恩斯坦計算神經科學研究中心的科學家 Matthias Kaschube 及其團隊的一項研究成果，說他們在相同哺乳類中的三種遠親動物嬰猴 (galago)、樹鼩 (tree shrew) 和矇眼貂 (ferret) 的大腦中發現，它們的視覺皮層的螺旋結構（不妨類比於太空中銀河系的螺旋結構）平均分佈密度是一樣的，而且都落在與  $\pi$  的值相同即 3.14 的 95% 置信區間之中。哇，這不會是巧合吧？雖然這個 3.14 不能與用電腦得到的 2 千萬億位數字相提並論，但對於理論生物學家來說， $\pi \pm 2\%$  已經是一個令他們難以置信的超級精確度了。



嬰猴 (galago)

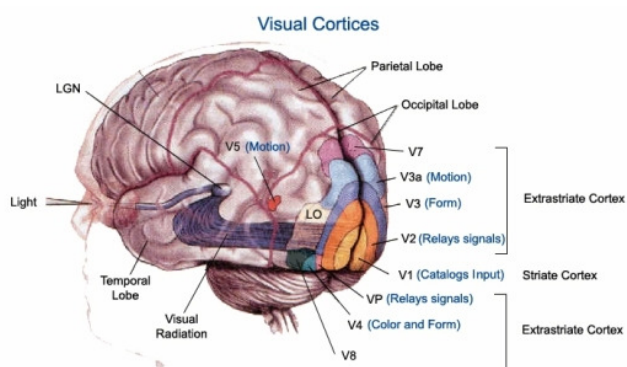


樹鼩 (tree shrew)

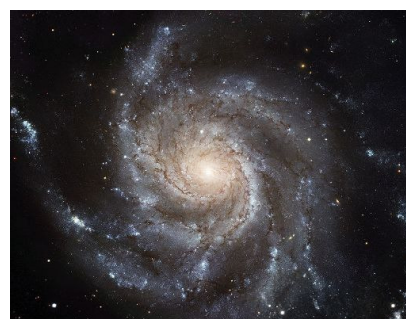


矇眼貂 (ferret)

科學家們相信，今天的生物大腦都是經過漫長時間通過自組織演化過程而逐漸形成的，並且都具有某種最優的結構和功能。如果是這樣的話，那些哺乳類動物大腦視覺皮層中基本螺旋結構分佈都不約而同地呈現出以 3.14 為平均密度之特徵，是不是自然進化的最優結果呢？不會是造物主在創世開始時，不經意地在它們的大腦中寫下了那個神奇的數字  $\pi$  吧？



(人類大腦的視覺皮層結構)



(太空銀河系的螺旋結構)

[本文中全部圖片均為非版權網上下載]

