没有最早，只有更早：混沌还有故事

陈关荣

（香港城市大学）

混沌（Chaos）的概念和认知或可追溯到古老的中国和希腊。但是，混沌数学理论，即可以用微积分公式和方程来定性定量表述的混沌理论，学界普遍认为是由法国通才数学家亨利•庞加莱（Jules Henri Poincaré，1854-1912）开始的，他给出了关于混沌系统对初始条件高度敏感的数学描述以及极限环概念的刻画。

荷兰电气工程师巴尔塔萨•范德波尔（Balthasar van der Pol，1889-1959）于1927年9月在《Nature》杂志上发文，报告了他在霓虹灯实验中观察到真空管放大器的电流存在具有极限环的振荡现象。范德波尔写下了这个张弛振荡器（relaxation oscillator）的微分方程：

$$\ddot{x} - k(1 - x^2)\dot{x} + x = bk\lambda\cos(\lambda t + \alpha)$$

其中 k, b, λ, α 为参数。这个方程和瑞利勋爵（Lord Rayleigh，John William Strutt，1842-1919）的方程是等价的，它还可以看作是李纳德（Alfred-Marie Liénard，1869-1958）方程的一种特别情形。不过，这个方程极限环的存在性是范德波尔在 $k > 0$ 和 $b = 0$ 时在实验中证实的。在 $k > 0$ 和 $b \neq 0$ 以及 $\lambda \neq 0$ 即有驱动信号输入时，在某种自然频率下他听到了来自系统内部的“毫无规律的噪声”。这篇文章很可能是观察到物理混沌现象最早的实验报告，只不过那时还没有混沌这个概念。其严格的数学理论则是后来英国数学家玛丽•卡特赖特（Dame Mary Lucy Cartwright，1900-1998）和约翰•李特尔伍德（John E. Littlewood，1885-1977）建立的。

注意到上述范德波尔方程要产生混沌的话需要振荡信号输入。这个时变函数驱动的方程是非自治的，而且不是简单低次的多项式系统。今天名满天下的简单三维一阶二次多项式自治微分方程描述的混沌系统是由美国气象学家爱德华•洛伦茨（Edward N. Lorenz，1917–2008）在 1963 年发现的：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx - xz - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

当参数 $a = 10,\ b = 8/3,\ c = 28$ 时，这个洛伦茨系统是混沌的。

不过，混沌还有故事。这个故事关于法国物理学家伊夫–安德烈·罗卡德（Yves-André Rocard，1903 年 5 月 22 日– 1992 年 3 月 16 日）。

1941 年，罗卡德出版了一本法文著作《振荡器理论》（Théorie des oscillateurs）。书的第五章题为“经济的振荡理论”（Les oscillateurs des thoreories economiques），其中他基于范德波尔的张弛振荡器方程设计了一个计量经济数学模型，用来描述经济的周期振荡。然后，他观察到模型解曲线的振荡频率明显依赖于振幅，便进一步改造了这个模型从而获得了一个混沌的张弛经济振荡模型。这个混沌模型也是一个简单三维一阶多项式自治微分方程系统，不过它的多项式有两个三次项，而洛伦茨系统只有两个二次项。无论如何，从时间来说，罗卡德的混沌系统比洛伦茨的发现早了 22 年。

图 1 伊夫–安德烈·罗卡德

【一】罗卡德的计量经济振荡模型

在《振荡器理论》一书的第五章里，罗卡德试图建立一个在稳定环境中经济周期的模型。他想象：“假设 y 是一种商品的价格，y_1 是该商品的消费者数量，或者它的总消耗量，并假设 y_2 是工具或机械化或某种合理化的程度，参与该商品的生产过程并有利于降低价格。我们推理时将不注重数量本身，更着重看它们偏离平衡点的位置，但不会去量化它们。”

罗卡德主张考察特定商品的市场动态，在经济学的标准假设下去研究商品与平衡位置的偏差。变量 y_2 是生产过程中的物质资本部分。在这类模型中，通常需要考虑两个生产要素，即物质资本和劳动价值。如果生产过程中物质资本的部分增加，生产率就会提高，从而生产量即供应量便会增加。基于这种考虑，罗卡德建立了如下一个由线性常微分方程组成的三维动力学模型：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -ay_1 + by \\ \frac{dy_2}{dt} = K(y + y_1) \\ m\frac{dy}{dt} = -y_2 \end{cases}$$

其中 $a > 0$ 和 $b < 0$ 为常参数，m 和 K 为待定常系数。

在这个模型中，第一个方程是需求的动态表达式，它考虑了法国经济学家 Léon Walras（1834-1910）的消费与价格平衡原理（encaisse désirée，即消费的增长会增加对货币的需求，而这会提高价格，但因此又会减少消费）和经典的需求定律（Law of demand，即购买量与价格成反比）。其中，参数 $a > 0$ 表示消费者数量的增长率或者消费者总消费量的增长率，$b < 0$ 是商品价格的增长率。

第二个方程是供给的动态表达式，其中 $(y + y_1)$ 可以理解为名义上的需求，而 K 则是这种名义需求的增长率。

第三个方程是价格的动态表达式，只取决于物质资本即供应量。这个方程可以改写为 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{m}y_2$，从而 m 对应于生产过程中资本部分的增长率。其意思是说，当 $m < 0$ 时，人们对物质资本不作投资，而当 $m > 0$ 时，则对物质资本进行投资。

现在，对这方程取二阶导数，然后把结果和其它两个方程进行线性组合，罗卡德便得到了一个三阶线性常微分方程：

$$m\dddot{y} + am\ddot{y} + K\dot{y} + K(a + b)y = 0$$

罗卡德指出，只要常参数 $b < 0$，这个动力系统或方程不会产生任何振荡，即不会有自持振荡。因此，为了获得振荡，需要对此参数加入一些动态变化。罗卡德用 $b(1 - y^2/y_0^2)$ 去取代常系数 b，其中 y_0 是常数。于是，他得到了一个三维一阶非线性常微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -ay_1 + b\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)y \\ \frac{dy_2}{dt} = K(y + y_1) \\ m\frac{dy}{dt} = -y_2 \end{cases}$$

或者

$$m\dddot{y} + am\ddot{y} + K\dot{y} + K\left[a + b\left(1 - \frac{y^2}{y_0^2}\right)\right]y = 0$$

至此，罗卡德获得了一个今天被称为 jerk 方程的所谓“加加速度”系统。

罗卡德解释道："这个系统的方程不再是线性的，令其数学分析变得更加困难。然而，我们可以借助张弛振荡的研究来作指导。大家很快就会看到，我们能够得出一个结论：存在有限振幅的自持振荡。"

接下来，罗卡德对这三阶非线性常微分方程进行了分析，并手绘出其解的示意图（图 2）。

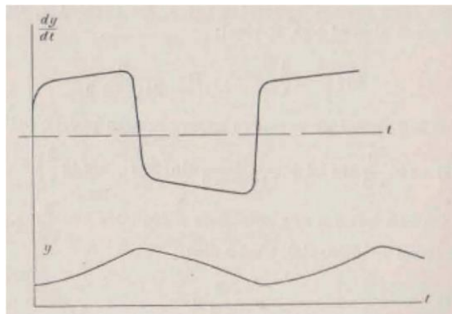

图 2 罗卡德手绘 jerk 方程解的示意图

罗卡德进一步说明，图 2 中的曲线"与典型的张弛振荡曲线非常相似"。根据图 2，他指出："对于价格 y 随时间的变化，我们获得了一个相当典型的规律：价格低时它缓慢地上升，当价格高时它加速，然后便缓慢下跌，到价格上涨时它会变化得更快，等等。"

最后，罗卡德指出，从数学的角度上来看，这意味着振荡的频率随着振幅的增加而降低。于是他认为，分析这个"振荡器"的频率如何依赖于振幅的问题将会是很有趣的。为此，他引进了参数

$$\omega^2 = \frac{K}{m},\ a = \varepsilon\omega,\ b = \eta\omega,\ y = y_0 z$$

进而得到了如下一个无量纲的三阶非线性常微分方程：

$$\dddot{z} + \varepsilon\omega\ddot{z} + \omega^2\dot{z} + \omega^3[\varepsilon + \eta(1 - z^2)]z = 0$$

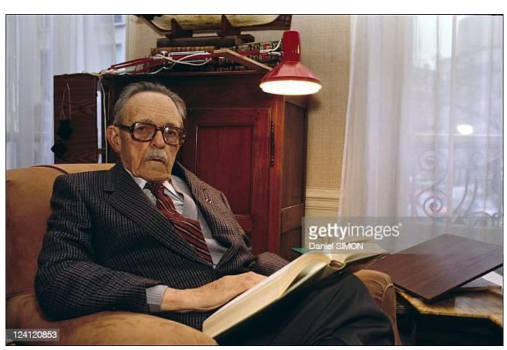

图 3 罗卡德在阅读

至此，回顾一下历史是很有意思的。尽管经济学家 Phillippe E. Le Corbeiller（1891-1980）和 Ludwig Hamburger（1890-1968）都曾建议用 van der Pol 的张弛振荡来研究经济周期，但他们从未开发出数学模型来。他们之后较早的一个数学模型可能是 1951 年 Richard M. Goodwin（1913 – 1996）提出的一个非线性微分方程，可以用来刻画持续或自持续振荡，以及张弛振荡。不过他并不知道罗卡德，而且已经是罗卡德模型十年之后的事了。

【二】罗卡德的混沌计量经济张弛振荡模型

在《振荡器理论》第五章的第二部分，罗卡德设计了另一个数学模型，它描写一个“频率很大程度上取决于振幅的振荡器”。为此目的，他对非线性振荡特性进行了编辑，把上面那个无量纲三阶非线性常微分方程进一步改写为

$$\dddot{z}+\varepsilon\omega\ddot{z}+\omega^2\dot{z}+\omega^3\left[\varepsilon+\eta\left(1-z^2-\frac{\dot{z}^2}{\omega^2}\right)\right]z=0$$

他解释道：“提供这个例子来进行研究是很有趣的，因为它依赖于振幅的频率变化可能变得完全不正常了。”

这个模型，据我们所知，是第一个混沌张弛计量经济振荡器，也是第一个混沌 jerk 方程，或称为混沌“加加速度”系统。它可以改写成无量纲三维一阶微分方程系统的形式：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\omega(\varepsilon x+\omega y+\omega z)\\ \dfrac{dy}{dt}=\omega\left[\varepsilon+\eta\left(1-z^2-\dfrac{x^2}{\omega^2}\right)\right]z\\ \dfrac{dz}{dt}=x\end{cases}$$

这是一个带两个三次项的多项式自治系统。

在这章书里，罗卡德没有给参数赋值作定量计算，但他使用了一些经典数学分析工具确认了该模型的解的“不正常”特性，即今天我们说的“混沌”特征。该模型很容易就可以通过调整参数值来产生混沌吸引子，比如选取 $\varepsilon=0.5$, $\omega=2.0$, $\eta\in[-1.34,0.94]$，在其中参数 η 的变化范围内可以看到倍周期分叉现象。这组参数相当于前面第一个方程组里取值 $a=\varepsilon\omega=1$, $b=\eta\omega\in[-2.68,1.88]$, $K=\omega^2 m=4m$，在其中参数 b 的变化范围内可以看到倍周期分叉现象。当然，不排除还有其它参数值和参数范围的选择。

事实上，这个混沌模型因为具有两个三次幂项，动力学行为相当复杂。例如，它可以产生从双涡卷混沌吸引子（double-scroll attractor）到莫比乌斯带（Möbius-strip），再到环面吸引子（toroidal attractor）的连续变化。通过控制参数 η 的值，这个模型能够产生反向倍

周期分叉然后过渡到正向倍周期分叉。由于这是一个具体的微分方程模型，有兴趣的读者都可以自行做仿真，没准还会发现更多、更复杂、更有趣的非线性动力学现象呢。

【三】罗卡德其人

伊夫–安德烈·罗卡德当然称得上是个经济学家，但他首先是个物理学家，而且更重要的是他被誉为“法国原子弹和氢弹之父”。

罗卡德 1903 年 5 月 22 日出生在法国西北部的 Vannes 市，有两个弟弟。非常不幸的是，他小时候就被发现是个聋子。他后来回忆说：“我五岁时就被证实耳聋——没有治愈的希望，因为我的耳膜是穿破了的——这生理缺陷支配了我的智力生活、我的性格和我的行为......”。这让罗卡德的个性变成非常坚强独立。他后来接受的教育是通过阅读而不是听课来完成的。

1927 年，24 岁的罗卡德获得了数学博士学位，次年又获得了物理学博士学位，随即被巴黎高等师范学院（École normale supérieure，ENS）聘为电子物理学教授。之后十年间，他还在工业界兼职，主要在雷达实验室里工作。

1929 年，罗卡德和学院教师 Renée Favre 结了婚。他们有一个儿子 Michel Rocard（1930-2016），在 1988-1991 年间担任法国总理（Prime Minister of France）。罗卡德夫妇后来在 1963 年离了婚。

1940 年代第二次世界大战期间，作为抵抗纳粹组织的成员罗卡德乘坐一架小型飞机从法国飞往英国，为英国情报部门提供重要的战事信息。在那里，他遇到了法国总统戴高乐。戴高乐任命他为“自由法国海军”（法国海军一支特种部队）的研究部主任。

在英国期间，罗卡德对用雷达探测太阳无线电辐射的科研项目特别感兴趣，他认为这种高频辐射可以用来干扰军事探测器，也能够用来发展新的无线电导航技术。

作为研究部主管，罗卡德跟随法国军队进入了德国。他成功地找到了德国红外线和无线寻踪方面的技术专家，并说服了他们为法国服务。他还试图吸引维尔纳·海森堡（Werner K. Heisenberg，1901-1976）和奥托·哈恩（Otto Hahn，1879-1968）身边的核物理学家，不过没有成功。

战后罗卡德返回法国，担任了 ENS 物理系及物理实验室主任。在那里，他利用从战争中获得的两个德国“Würzburg”雷达建立了一个无线电天文台。

基于罗卡德在反法西斯战争中的杰出科技贡献，英国政府授予他司令勋章（Commander of the Order）、法国政府授予他荣誉军团勋章（Order of Merit）。

从 1947 年起，罗卡德任职法国军方原子能工程技术部的科学顾问。1951 年，他接替了弗雷德里克·约里奥-居里（Frédéric Joliot-Curie，1900-1958）在政府科技部门的位置，成为法国核武器发展计划（French Atomic Energy Commission）的科学技术负责人，参与了关键的重大设计和实验项目，被后人誉为“法国原子弹（A-Bomb）和氢弹（H-Bomb）之父”。

退休后，他的研究兴趣转向了不明飞行物、生物磁学和深层探测技术方面。

罗卡德于1992年3月16日辞世，享年89岁。他被安葬在巴黎的Cimetière du Montparnasse公墓。

图 4 伊夫–安德烈·罗卡德之墓

【四】后记

本文的主要信息由笔者的法国朋友Jean-Marc Ginoux（Université de Toulon，France）提供，他有数学博士和科学史博士两个学位。Jean-Marc 则是从他的一位经济学同事 Franck Jovanovic（Université TÉLUQ，Canada）那里获得罗卡德的法文原本《振荡器理论》（Theorie des Oscillateurs）。这本 1941 年的老书目前尚未有英文或中文译本。

Jean-Marc 对笔者说，他现在认为，第一个三维一阶多项式自治微分方程混沌系统不能说是美国人洛伦茨在气象学领域为模拟大气对流而设计出来的，而应该说是法国人罗卡德在描述计量经济学中的张弛振荡变化而设计出来的。作为老朋友，笔者笑着回应：你现在大概也会同意，在近代数学和科学发展中，英语比法语更有优势，对吧？最后两人同乐。

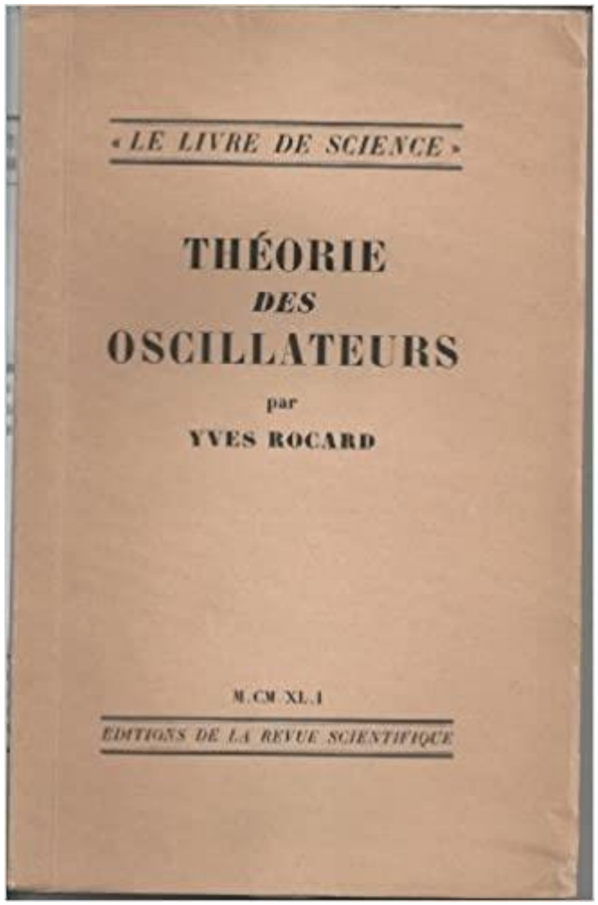

图 5 伊夫–安德烈·罗卡德《振荡器理论》（1941）

学术研究报告：

Jean-Marc Ginoux et al., “Rocard's 1941 chaotic relaxation econometric oscillator,” International Journal of Bifurcation and Chaos, March issue 2022.