

希尔尼科夫和他的分叉与混沌理论

陈关荣

列昂尼德·帕夫洛维奇·希尔尼科夫（Leonid Pavlovich Shilnikov, 1934年12月17日—2011年12月26日）是俄罗斯著名数学家，专长于非线性动力系统的分叉和混沌理论研究。

希尔尼科夫毕其一生在俄罗斯“下诺夫哥罗德罗巴切夫斯基国立大学”（Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod）读书和工作。罗巴切夫斯基（Nikolai I. Lobachevsky）是非欧几何创始人之一。下诺夫哥罗德是俄罗斯一座古城堡，建于1221年。1932年，该城市改名为高尔基（Maxim Gorky）城，该大学也改名为高尔基国立大学，到1990年10月双双恢复原名至今。

2000年7月初，我应好友 Vladimir Shalfeev 教授的邀请访问了这所大学，并于10日在希尔尼科夫旗下的俄罗斯国际高等研究中心（Russian International Center for Advanced Studies）讲了个小报告，题为“面向工程应用的混沌控制与反控制技术研究”（Control and anticontrol of chaos for engineering applications）。我的报告由希尔尼科夫主持，因而有幸见过他一面。有趣的是，当时他坚持只讲俄语，我只能从他的笑容和动作去领会他的意思。2011年痛悉希尔尼科夫病逝，我作为《国际分叉与混沌杂志》（International Journal of Bifurcation and Chaos）主编组织了一期悼念他的学术专刊，邀请他的数学家儿子 Andrey L. Shilnikov 和几位同事及学生把他们在2013年一次纪念希尔尼科夫的学术会议报告完备化，以文集形式于2014年8月份出版（图1）。希尔尼科夫生前是这份杂志的荣誉编辑。

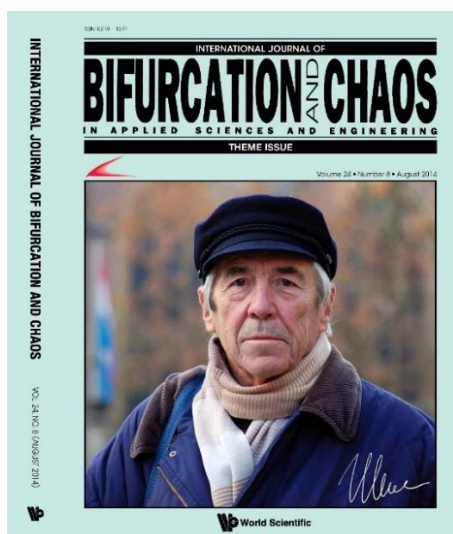


图1 列昂尼德·希尔尼科夫纪念专刊（2014）

【一】

希尔尼科夫出生在俄罗斯基洛夫（Kirov）科捷尔尼奇（Kotelnich）地区的一个劳工家庭。他 1952 年中学毕业后进入当时称为高尔基国立大学的物理与数学系，1957 年毕业后继续研究生学业，师从尤里·奈马克（Yurii I. Neimark）。1962 年，他以题为“从奇异轨线产生的周期运动”（The birth of periodic motions from singular trajectories）的论文获博士学位。他的博士论文把亚历山大·安德罗诺夫（Aleksandr A. Andronov）和叶夫根尼·莱昂托维奇（Evgenia A. Leontovich）的平面非局部的分叉理论推广到高维。图 2 取自他的博士论文，左图描述了鞍点同宿环通过分叉产生的稳定周期轨；右图描述了鞍焦点的同宿环。

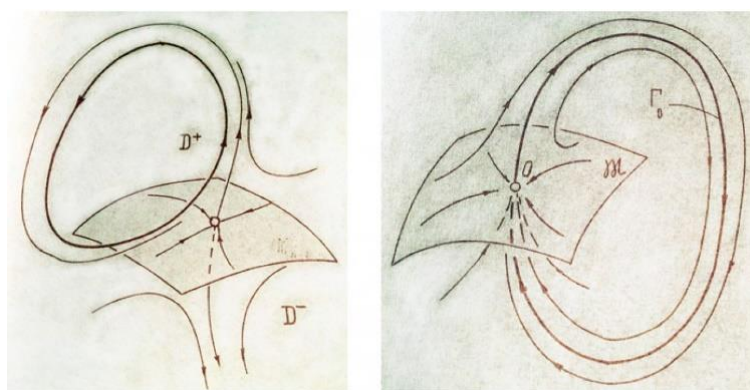


图 2 希尔尼科夫博士论文中的一幅示意图（1962）

很快，希尔尼科夫就被复杂优雅的混沌理论所吸引，尤其是斯蒂芬·斯梅尔（Stephen Smale）的马蹄理论和德米特里·阿诺索夫（Dmitri V. Anosov）的几何流理论。1965—1967 年间，希尔尼科夫发表了几篇重要论文，对动力系统周期运动中鞍型同宿轨邻域中的轨线集及结构的 Poincare-Birkhoff 问题给出了完整的解答。这些结果为构建混沌吸引子提供了基本思路，他称之为 spiral chaos。随后，他建立了一套完整严格的标准，用以判定三维自治系统中鞍焦点同宿轨自相交意味着有无穷多个斯梅尔马蹄存在从而证明系统是混沌的。这个理论是局部的，可以用鞍焦点上的雅可比矩阵特征根来判别，它成为了今天工程技术和应用科学家们最喜爱的分析工具之一。希尔尼科夫判据后来被推广到异宿轨情形。异宿轨情形的希尔尼科夫判据说：假定一个三维自治系统具有两个不同的鞍焦点并且存在一条连接它们的异宿轨线，如图 3（左图）所示。再假定这两个鞍焦点上的雅可比矩阵特征根分别为 $\alpha_1, \beta_1 \pm i\omega_1$ 和 $\alpha_2, \beta_2 \pm i\omega_2$ ，满足 $|\alpha_1| > |\beta_1| > 0$ ， $|\alpha_2| > |\beta_2| > 0$ 和 $\beta_1\beta_2 > 0$ 或 $\omega_1\omega_2 > 0$ ，则该系统具有无穷多个斯梅尔马蹄，从而在这个意义上系统是混沌的（如图 3 右图所示）。

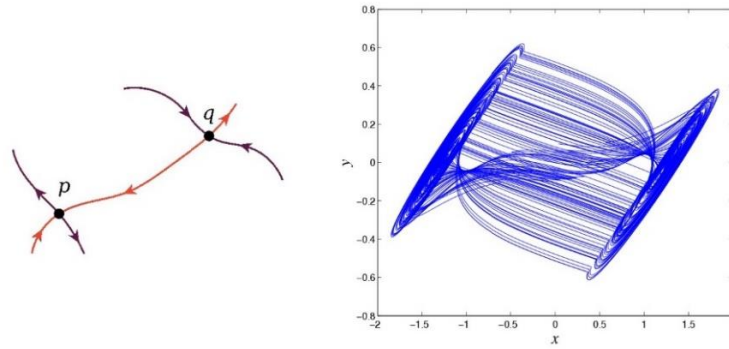


图3 异宿轨线情形的希尔尼科夫判据及其混沌吸引子（示意图）

值得一提的还有希尔尼科夫发展的 **cross-mapping** 方法，给出鞍点邻域非线性解的渐近公式，成为研究同宿轨分叉问题的有效工具。此外，希尔尼科夫特别详细地研究了洛伦茨（Edward N. Lorenz）系统的同宿轨和异宿轨分叉现象。今天周知的 **Afraimovich—Bykov—Shilnikov** 理论为分析洛伦茨吸引子的结构和演化提供了非常有效的解析方法。

希尔尼科夫和他的学生团队开辟了动力系统全局分叉分析的新方向。他们把全局分叉归结为三类：经典的莫尔斯—斯梅尔（Marston Morse 和 Stephen Smale）类，具有复杂动力学行为的莫尔斯—斯梅尔类，以及具有复杂动力学行为的全局分叉类。在 1969 年的一篇重要论文中，他给出了从莫尔斯—斯梅尔类转化为具有复杂动力学行为的鞍—鞍型不动点花束（bouquet）同宿环分叉的第一个具体例子。希尔尼科夫还提出了 **quasi-attractor** 的概念，就是同时含有稳定长周期轨线和双曲型点集的吸引子。希尔尼科夫后来还研究了无穷维非自治系统的动力学理论。

1982 年起，希尔尼科夫继莱昂托维奇和安德罗诺夫之后担任了应用数学与控制论研究所和微分方程系主任。在他的组织和带领下，特别是通过他长期开展每周两小时的研究讨论班，整个学术团队在几何曲面流和叶片（foliation）理论、A-同胚二维吸引子、代数曲线、高维莫尔斯—斯梅尔系统、可积系统、局部和全局分叉分析、复杂一维映射以及场论等多个领域做出了一系列一流成果，令世界瞩目。他留下了一个著名的 **Shilnikov School** 学术研究基地。

希尔尼科夫还注重把他们的动力系统理论应用到物理学、生物学、湍流和水力学以及气象学等不同领域中。特别是，因为他所在的大学是无线电收音机（radio）发明家之一亚历山大·波波夫（Aleksandr A. Popov）的母校，希尔尼科夫十分关注动力系统理论在无线电方面的应用研究，特别是对其中 **spatial chaos** 的分叉分析。

希尔尼科夫后期著名工作包括有趣的“蓝天灾变”（Shilnikov blue-sky catastrophe）。粗略地说，余维-1 的分叉可以按系统轨道的周期和长度分类为：有限周期和零长度、有限周期和有限长度、无穷周期和有限长度、无穷周期和无限长度等四种，其中最后一种经由灾变过程最终“消失在蓝天里”。

在上述研究领域里，希尔尼科夫一生发表了 160 多篇论文和几本专著。他是下诺夫哥罗德数学学会第一任主席，获得过俄罗斯科学院李雅普诺夫（Aleksandr M. Lyapunov）

奖章（1998）、乌克兰科学院拉夫连季耶夫（Mikhail A. Lavrentiev）奖章（2005）以及德国洪堡教授（2002）等荣誉。

希尔尼科夫有一个亲和的家庭。数学之外，他喜欢历史特别是科学史，着迷看足球比赛，并喜欢夏天闲时钓鱼。



图 4（左图）希尔尼科夫和夫人 Ludmila Ivanovna；（右图）夏日钓鱼

【二】

2009 年 12 月 17 日，俄罗斯数学家们为希尔尼科夫举办了一个庆祝他 75 周岁生日的小型学术会议。这次会议留下了希尔尼科夫和他一些同事、学生和朋友的珍贵照片。其中，我回顾了令人动容的一幅：他和好朋友乌克兰数学家亚历山大·沙可夫斯基的合照（图 5）。今天，在希尔尼科夫逝世 11 周年和 2022 年结束之际，我仅以此照片沉痛悼念两位友好的数学家前辈朋友，希望他俩在天堂回望自己祖国的时候能够早日得到安慰。



图 5 希尔尼科夫和沙可夫斯基（2009）