我们喜欢混沌（chaos），因为我们喜欢创造秩序（order） —— 莫里茨·埃舍尔

镶嵌图案：复杂源自简单

陈关荣

（香港城市大学）

“镶嵌”（tessellation），也称为“密铺”（tiling），是一种用多块具有相同几何形状的瓷砖（tile）不重叠也不留空隙地铺满地面或墙壁的技术或艺术。生活中人们使用具有某些固定几何形状的片块组装出各种各样复杂美观的图案（pattern），如图 1 所示。

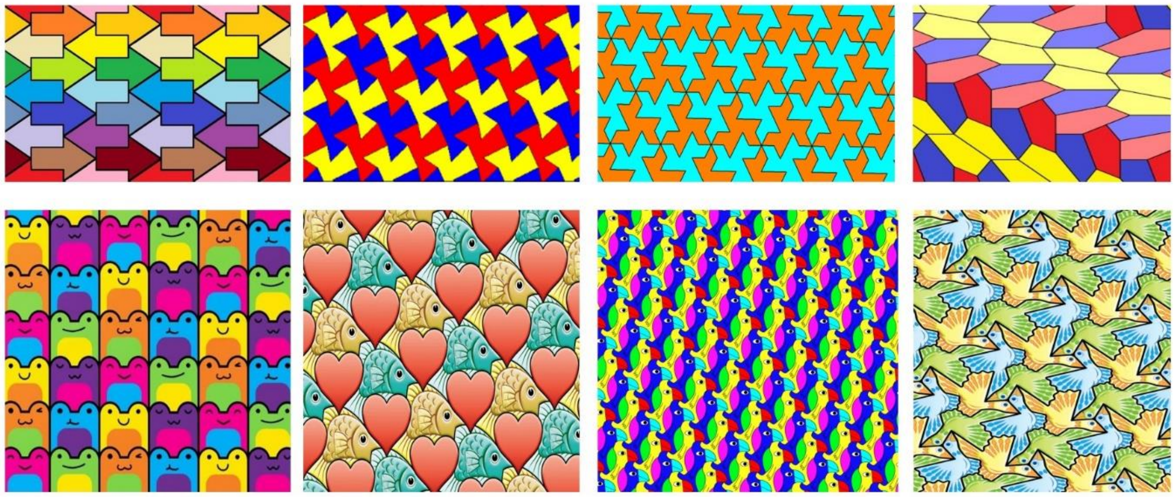

图 1 “镶嵌”或“密铺”艺术图案示例

“镶嵌”的英文单词 tessellation 来自希腊文 τέσσερα（tessera），意指“四”，因为第一代瓷砖是四方形的，是早期人们铺建地板和墙壁所使用瓷砖的最简单几何形状。镶嵌的历史可以追溯到公元前 4000 多年，那时苏美尔人（Sumerians）已经开始用粘土瓦片去装饰他们的房子和神庙。之后，这种技术和艺术经历了埃及人、波斯人、罗马人和希腊人的传承，到拜占庭人、阿拉伯人、中国人、日本人和摩尔人的发展，期间不断地被加入不同时代和不同民族的不同宗教、文化和艺术元素。值得一提的是伊斯兰美术特别是中世纪西北非洲的马格里布和摩洛哥以及尼日利亚、西南欧洲的伊

比利亚半岛、地中海的西西里岛和马耳他等这些地区的穆斯林民族的贡献。他们的设计称为“zillij”或“zellige”，意指这是一门以“学习、规则和信仰”为基础的艺术。

图 2 伊斯兰镶嵌图案美术设计示例

从中世纪开始，特别是到了 19 和 20 世纪，人们开始从数学理论特别是图论的角度来研究和设计各种复杂的镶嵌图案。其中最有代表性的是荷兰艺术家莫里茨·埃舍尔（Maurits C. Escher，1898–1972）及英国数学物理学家罗杰·彭罗斯（Roger Penrose，1931–）和他的父亲、精神科医生莱昂内尔·彭罗斯（Lionel S. Penrose，1898–1972）的多种奇妙设计。这位埃舍尔就是那幅著名透视错觉素描“上下阶梯”（Scaffold ascending and descending，图 3 左图）的作者。他还设计了许多美观的木刻、石版画、铜版画和素描镶嵌图案（例如，图 3 中图和右图）。

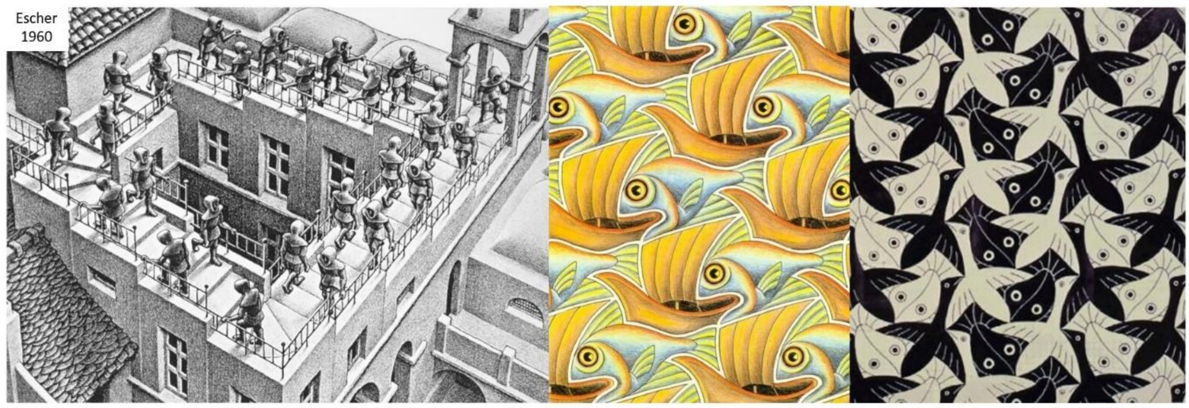

图 3 埃舍尔的“上下阶梯”名画和他的镶嵌图案示例

埃舍尔的“上下阶梯”设计是受到彭罗斯楼梯（Penrose stairs，图 4 左上图）和彭罗斯三角（Penrose triangle，图 4 左下图）的影响完成的，是彭罗斯楼梯的艺术表现。彭罗斯父子留下了“彭罗斯密铺”（Penrose tiling），包括彭罗斯楼梯和彭罗斯三角为特殊情形，而后者最早是由瑞士图形艺术家奥斯卡 • 路透斯瓦（Oscar Reutersvärd，1915–2002）在 1937 年画出的。

罗杰 • 彭罗斯还构造了一些非周期（aperiodic）镶嵌图案（例如，图 4 中上图）。作为对比，另一类镶嵌图案是通过周期（periodic）重复过程产生的（例如，图 4 中下图）。彭罗斯三角和彭罗斯楼梯与“莫比乌斯带”（Möbius strip，图 4 右上图）和“不可能三叉戟”（impossible trident，图 4 右下图）等拓扑及幻觉视图密切相关，但这里就不扯远了。值得一提的是，镶嵌技术只是数学物理学家罗杰 • 彭罗斯的业余喜好，他在 2020 年 89 岁高龄时因“使用巧妙的数学方法证明了黑洞是爱因斯坦广义相对论的直接结果”而荣获诺贝尔物理学奖。

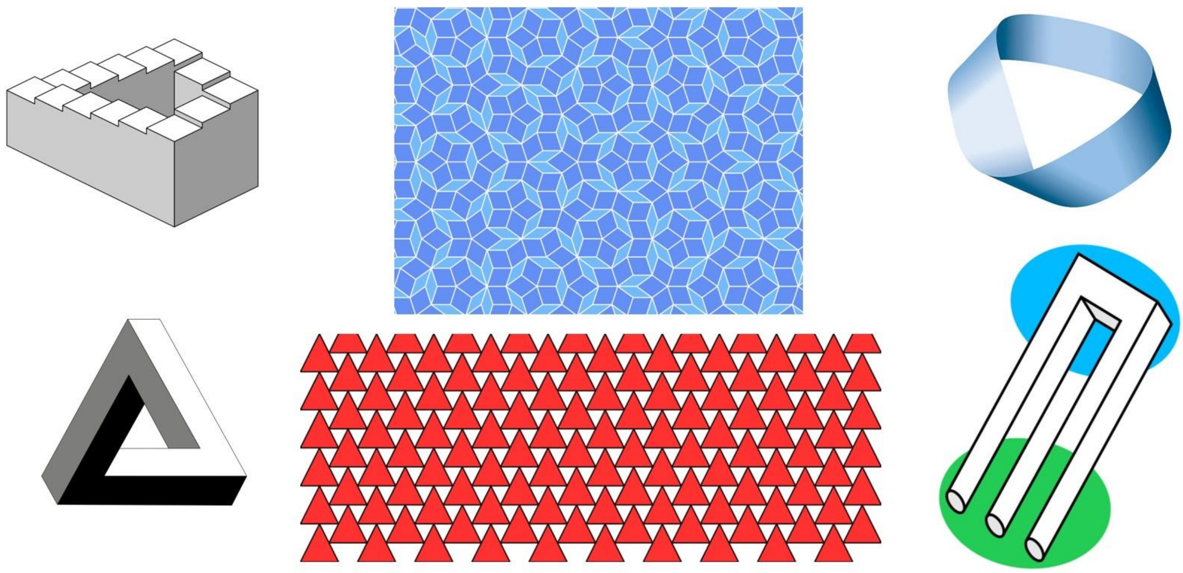

图 4 （左）彭罗斯楼梯与三角；（中）非周期与周期镶嵌；（右）莫比乌斯带与不可能三叉戟

平面镶嵌中任何一种形状的基本瓷砖都称为一个“原型块”（prototile）。就使用的原型块数量而言，只用一种原型块的镶嵌称为单面体密铺（monohedral tiling）。这种类型的瓷砖由单一形状组成，也称为单瓷砖（monotile）。因为它的德文是 ein Stein，大家戏称之为 einstein（“爱因斯坦”）。周期性单面体密铺是很容易的，例如可使用正三角形、正方形或正六边形的原型块。至于五边形，目前知道的仅有 15 种原型块，如图 5 所示。

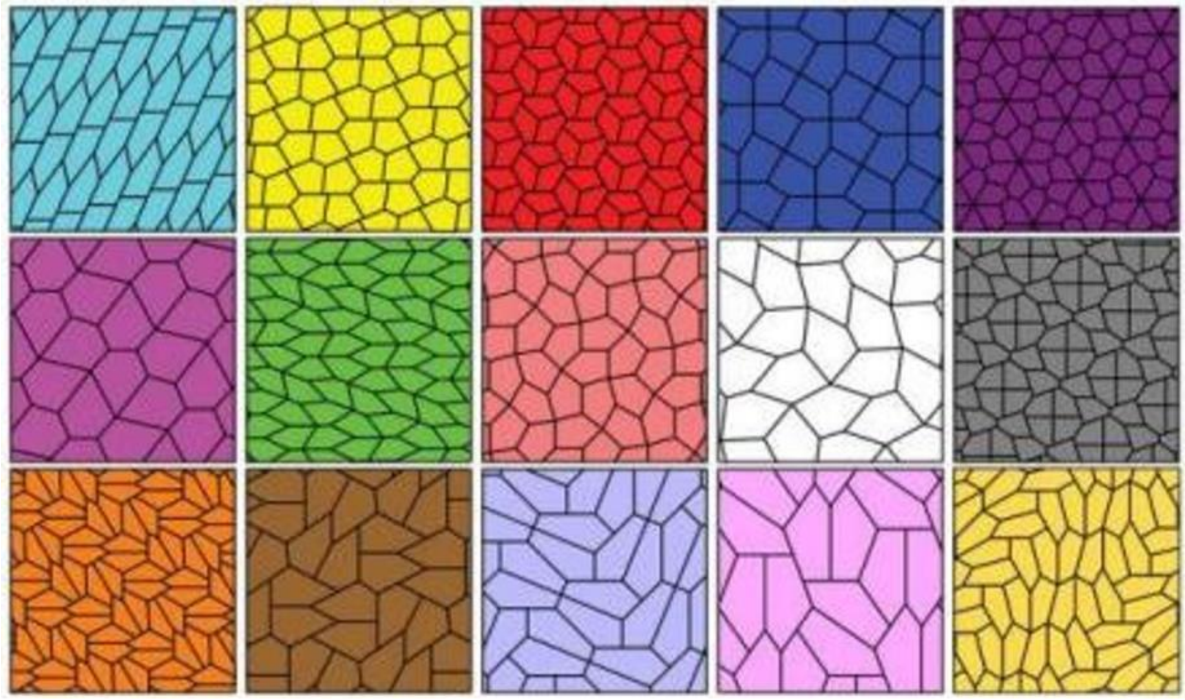

图 5 目前知道的 15 种五边形周期密铺

至于非周期性单面体密铺，那就困难得多了。罗杰·彭罗斯第一个指出，用两种不同的菱形就能实现非周期性密铺（图 6，左图）。多年以后，到了 2023 年 5 月，一个由英国、加拿大和美国的计算机科学家和数学家组成的研究小组（David Smith, Joseph S. Myers, Craig S. Kaplan, Chaim Goodman-Strauss）宣称：他们找到了只用一种 13 边形单面体原型块便可完成的非周期性密铺（图 6，右图）。

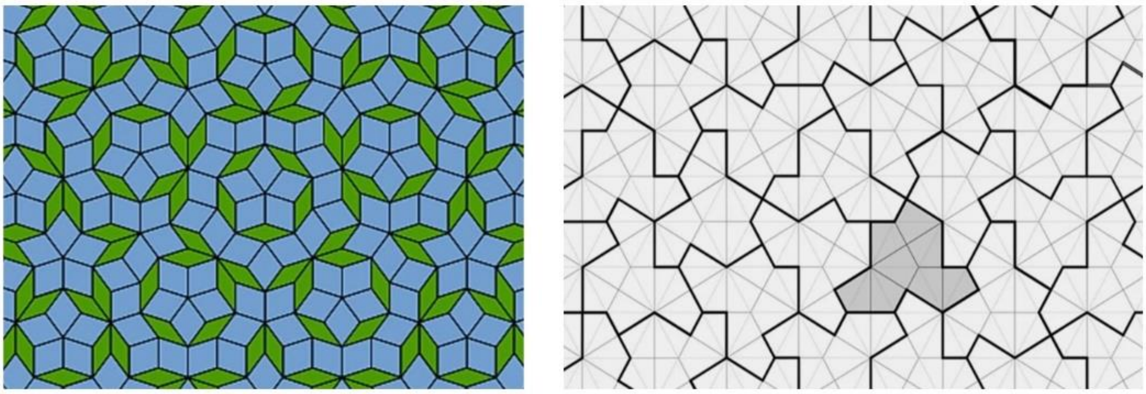

图 6 非周期密铺：彭罗斯用 2 种菱形; David Smith 小组用 1 种 13 边形

一种特别复杂别致的单面体密铺类型是螺旋单面体密铺（spiral monohedral tiling），在 1936 年由德国数学家海因茨·沃德伯格（Heinz Voderberg，1911–1945）发现，如图 7 所示。很快，它就被推广到双面体密铺（dihedral tiling）、三面体密铺（trihedral tiling）、四面体密铺（tetrahedral tiling）以至 *n*-面体密铺（*n*-hedral tiling）。不过，我们这里就不进一步介绍那些繁杂的高维镶嵌问题了。

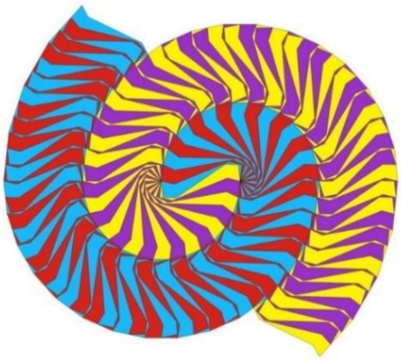

图 7 沃德伯格的螺旋单面体密铺

基于所用多面体原型块的种类，镶嵌可分为规则、半规则和不规则的，如图 8 所示。

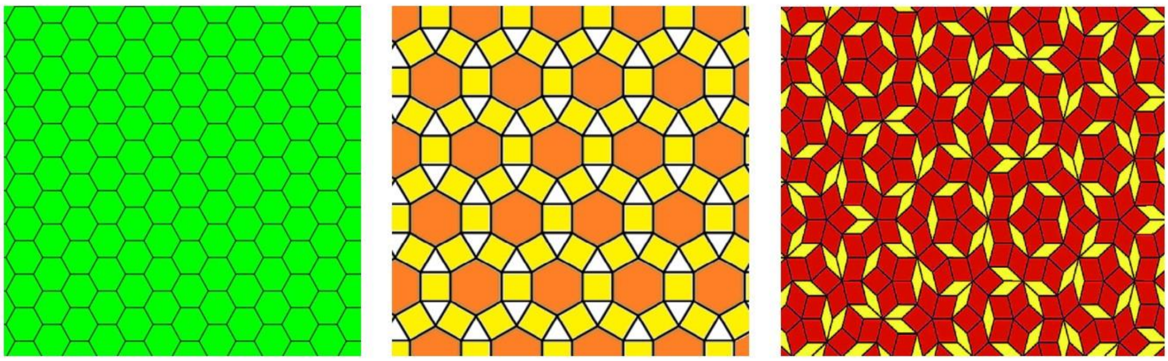

图 8 规则（左）、半规则（中）和不规则（右）的镶嵌图案

一个有趣的半规则镶嵌图案是“拿破仑密铺”（Napoleon tiling）。如图 9 所示，从红色三角形开始，在其三条边外各自生成一个等边三角形。当年拿破仑发现，以三个新三角形的中心黑点作为顶点组成的三角形是个正三角形。我们这里不去讨论这个拿破仑正三角形，而是以四个拼接在一起的三角形作为基本原型块，不断重复相同的规则向外扩展，从而获得一个密铺。

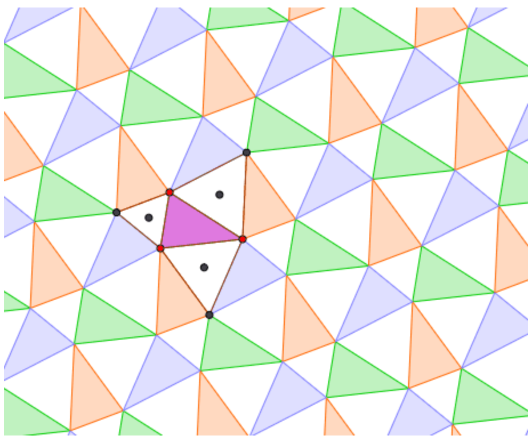

图 9 拿破仑密铺

显而易见，图形的“对称性”（symmetry）在这里大有用武之地。在镶嵌中作数学分析和计算时，通常假定平面是无限的，即在任何方向都没有边界。从而，在一个无限平面上便可以考虑各种对称几何变换，主要包括：平移变换，即把图形向一定的方向平移一定的距离；旋转变换，即把图形相对于某个参考点转动一定的角度；滑翔反射变换，即把图形相对于某条参考轴线作镜面反射然后再进行一次一定距离的平移。这三种几何变换得到的结果图形和原来的图形是等长等度（isometric）的，就是说原来图形的任何边长和角度都没有改变，只是变换了位置和方位，如图 10 所示。

图 10 平移变换（左）、旋转变换（中）和滑翔反射变换（右）

在镶嵌设计中，人们往往通过各种不同组合的对称几何变换来获得美观的效果。这里当然要记住，不管镶嵌如何设计，它一定要密铺，即铺满整个平面并且没有重叠也不留空隙。早在 1891 年，俄罗斯数学家叶夫格拉夫 • 费奥多罗夫（Evgraf S. Fedorov，1853–1919）就证明了，使用任何一种原型块，最多可以有 17 种不同的组合方式去密铺一个平面。1924 年，匈牙利裔美国数学家乔治 • 波利亚（George Pólya，1887–1985）独立地证明了同样的结果。数学家们发现，这些组合可以构成某种数学“对称群”（symmetry group），称为“墙纸群”（wallpaper group）。受波利亚的启发，埃舍尔还设计了 43 种包含这 17 种不同组合的漂亮镶嵌图案。

还有一种基于“非欧几里得几何”来设计的有趣镶嵌图案，如图 11 所示，其中左图属于双曲几何（hyperbolic geometry）图案，右图属于球面几何（spherical geometry）图案。

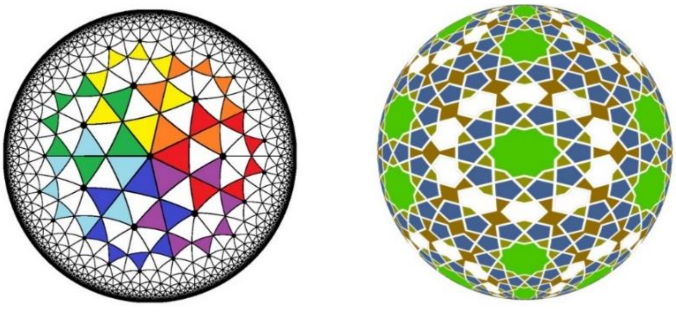

图 11 “非欧几里得几何”镶嵌图案

显然，在各种组合分类中，颜色也是一个重要的因素，即形状相同但颜色不同的瓷砖是否被认为是不同的？这在艺术设计中通常都没有争议，但在数学研究和讨论中是需要事先界定的。1961 年，华裔美籍逻辑学家王浩（1921–1995）注意到决策问题与镶嵌问题可按某种方式对应起来。为方便表达他引入了带不同颜色的正方形原型块，后人称之为“王浩多米诺骨牌”（Wang domino）。王浩证明了：图灵机可转化为一组王浩多米诺骨牌。他还提出了一个“多米诺骨牌问题”：是否存在一组王浩多米诺骨牌，通过适当的放置让邻接骨牌边缘两侧具有不同颜色，使得它们密铺整个平面？他观察到，如果这个问题是逻辑学不可判定的，那么就等于说必定存在一组非周期王浩多米诺骨牌来实现密铺。当年，这个逻辑学不可判定问题似乎是难以置信的，所以王浩推测该问题在逻辑上应该是可判定的，因而不存在这种非周期图形集合。

1964 年，王浩的学生罗伯特 • 伯杰（Robert Berger，1938–）在他的博士学位论文中证明了：王浩多米诺骨牌问题是逻辑不可判定的，因此导师提出的问题是对的但他猜测的答案是错的。伯杰具体构造了一组 20426 个非周期性王浩多米诺骨牌。他还说，这个数字可以减少到 104，但其证明没有正式发表。1968 年，美国计算机科学家唐纳德 • 高德纳（Donald E. Knuth，1938–）修改了伯杰的构造程序，发现只需要 92 个王浩多米诺骨牌就可以了。1971 年，美国数学家拉斐尔 • 罗宾逊（Raphael M. Robinson，1911–1995）进一步简化了伯杰的构造程序，指出只需要 56 个多米诺骨牌。1996 年，捷克计算机科学家卡雷尔 • 库利克（Karel Culik II, 1934–）把这个数字减少到 13 个。2015 年，法国计算机科学家 Emmanuel Jeandel 和 Michael Rao 证明了，只需 11 个王浩多米诺骨牌并使用 4 种颜色便足够了，如图 12 所示。

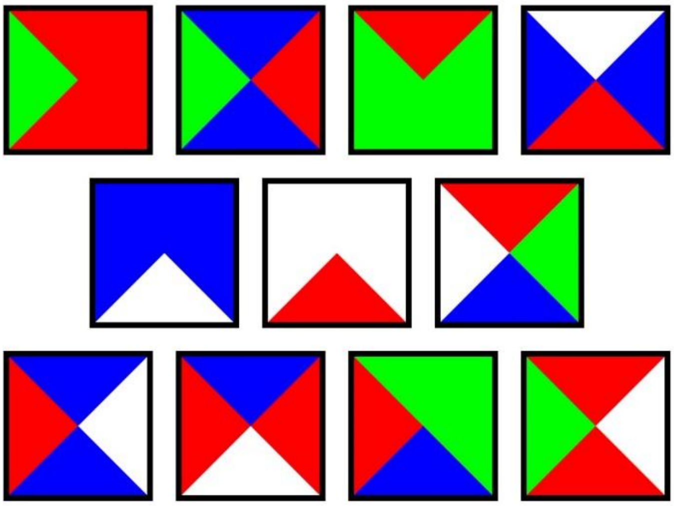

图 12　Jeamdel 和 Rao 的 11 个王浩多米诺骨牌和 4 种颜色分配

数学家们除了喜欢去证明存在或者不存在的各种命题，例如上面说的王浩关于非周期性多米诺骨牌的存在性问题，他们还喜欢去找各种各样的极大或者极小。当数学家们谈论平面密铺问题时，他们就问：如果用面积为 1 的全等多边形原型块作平面密铺，那么周长最短的原型块有怎样的形状？显然，单位正方形可作密铺，它的周长为 4，如图 13（左图）所示。但它是周长最短的吗？容易验算，面积为 1 的正六边形也是可以作密铺的，而且它的周长约为 3.72，比正方形要短。但和正方形不同，平移变换后的正六边形的几何中心并不恰好落在标准单元网格的整数坐标点上（图 13 中图）。因

此，如果我们坚持要求原型块的几何中心都落在网格的整数坐标点上，那么这个问题仍会有解吗？1989 年，韩国数学家、前 KIAS 大学校长 Jaigyoung Choe（1953–）证明了，存在最小周长为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}\approx 3.86$ 的六边形原型块，它可满足这个要求，如图 13（右图）所示。不要说他只是巧妙地把正六边形扭曲变形了一下，这可是目前最好的结果。

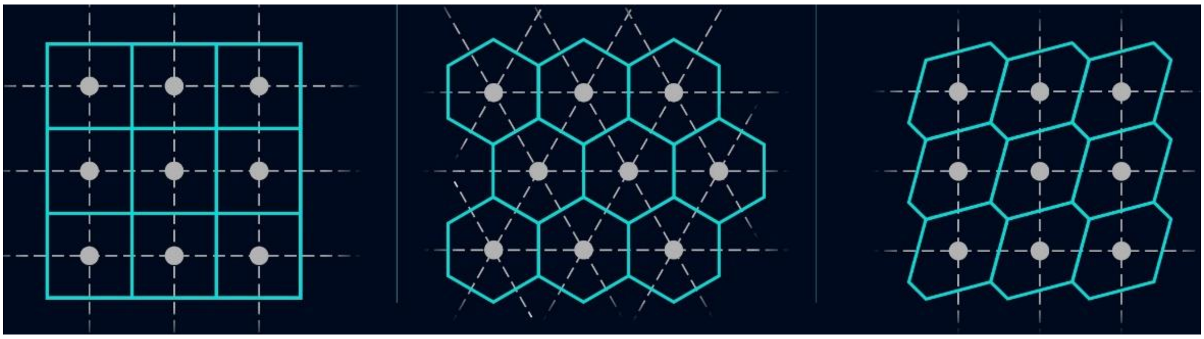

图 13 面积为 1 的多边形原型块作平面密铺，要求周长为最短

最后，容易想象，分形图案的镶嵌更为五彩缤纷，如图 14 所示。但复杂分形的产生依赖于计算机。今天，计算机辅助生成的分形镶嵌图案琳琅满目。各种图像的网格划分所遵循的镶嵌原则也被应用于塑造屏幕上的图像以获得更好的视觉效果。事实上，图形艺术世界是一个广阔的领域，展示了艺术如何与数学和科学融合，以及如何通过简单图形的重复去生成复杂漂亮的图案，其中色彩斑斓的分形镶嵌尤其引人关注。

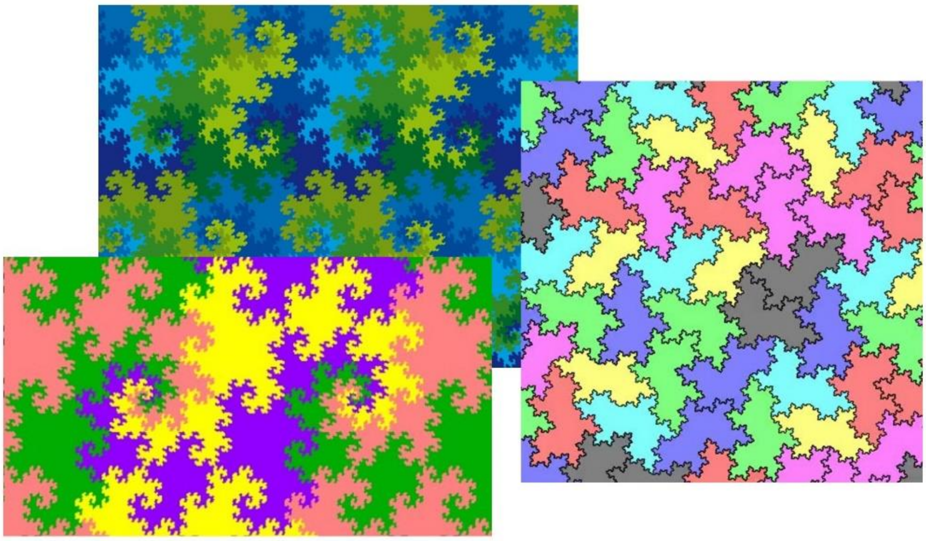

图 14 分形镶嵌图案示例

今天，镶嵌图案理论和技术向高维的延伸和演化以及它们在计算机图形学和材料物理准晶体学等方面的具体应用，其成果极其丰富多彩。不过，这些有趣的论题已经远远超出了这篇不可能实现密铺的小品文的镶嵌覆盖面了。

（本文所有图片来自网络）