

广义Lorenz系统及其规范式*

陈关荣

(2005 年)

香港城市大学

混沌控制与同步学术研究中心

gchen@ee.cityu.edu.hk

本文简要介绍了广义 Lorenz 规范式(GLCF)，它包括了经典的 Lorenz 系统以及新近发现的 Chen 系统作为两个特殊和极端的系统，而在这两个极端系统之间存在着无穷多个相关但不拓扑等价的混沌系统。本文也指出了一些新近报告的混沌系统只是 GLCF 的特例。

关键词：混沌，Lorenz 系统，Chen 系统，规范式

1. 引言

发现于 40 年前的著名的 Lorenz 系统[11]，可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

其中， a, b, c 是实参数。当 $a = 10, b = 8/3, c = 28$ 时，系统处于混沌状态，如图 1-(a)所示。

这个经典的 Lorenz 系统在混沌理论、动态系统以及混沌控制与同步领域已被广泛地研究[5,16]。今天，人们可能疑惑是否 Lorenz 系统仅仅是幸运地被发现的一个孤立的例子，还是在这个令人惊喜的混沌系统周围还有可能存在一些其它相关的混沌系统。本文就此报告一些新近重要的发现和发展。

稍作回顾，Chen 于 1999 年在混沌系统的反控制(或称为混沌化)的研究中发现了一个新的系统[7,17]。随后，该系统被其他研究者称为 Chen 系统[22]。这个新的系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (2)$$

其中， a, b, c 是实参数。当 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时，系统处于混沌状态，如图 1-(b)所示。

尽管该系统看上去与 Lorenz 系统有着相似的结构，但他们是拓扑不等价的(显然，Chen 系统比 Lorenz 系统多出了一项，它们不可能等价；细节见下面的讨论)。在数学上已经证明 Chen 吸引子确实存在，并有着多种复杂的动力学行为[8,17,21]。

在 Celikovsky 和 Vanecek 意义下，Chen 系统被证明是 Lorenz 系统的对偶系统：如果把这种类型的系统写成线性部分 Ax 和二次型部分 $f(x)$ 之和，即： $\dot{x} = Ax + f(x)$ ，其中

* 与 Sergej Celikovsky 教授及吕金虎博士合作，由香港研究资助委员会资助 (Grants: CERG 1098/00E, 1018/01E, 1004/02E, 1115/03E).

$A=[a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，则对于线性部分，Lorenz 系统满足 $a_{12}a_{21} > 0$ ，而 Chen 系统满足 $a_{12}a_{21} < 0$ 。

在 2002 年，Lu 和 Chen[12]进一步发现了一个混沌系统，此处称为 Lu 系统，该系统满足 $a_{12}a_{21} = 0$ ，刻画了 Lorenz 系统和 Chen 系统之间的过渡。此系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = -xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (3)$$

其中， a, b, c 是实参数。当 $a = 36, b = 3, c = 20$ 时，系统处于混沌状态，如图 1-(c)所示。

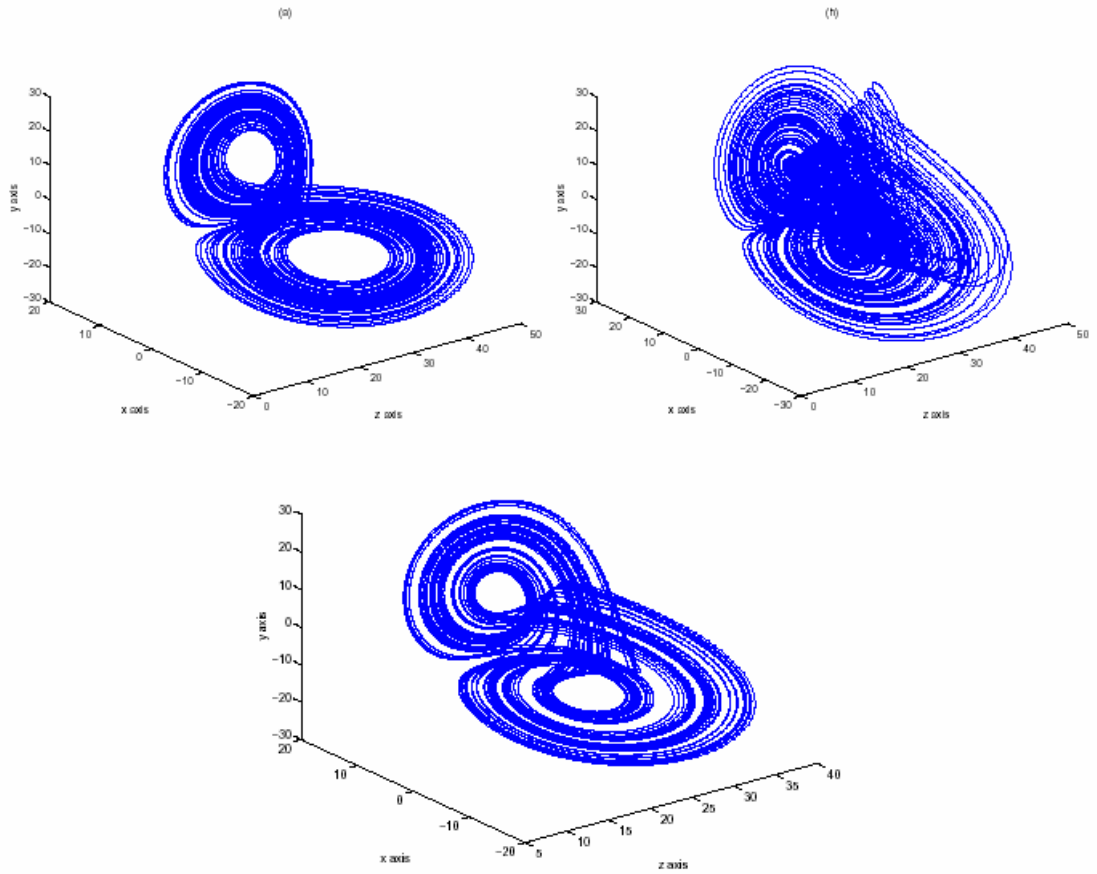


图 1. (a) Lorenz, (b) Chen, 和 (c) Lu 混沌吸引子

随后，在 2002 年，一个“统一系统”被构造出来[13]，作为 Lorenz 系统、Lu 系统和 Chen 系统之间的光滑链接。该系统可表述为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x) \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y \\ \dot{z} = xy - \frac{1}{3}(\alpha + 8)z, \end{cases} \quad (4)$$

其中， α 是实参数。对于所有的 $\alpha \in [0,1]$ ，系统处于混沌状态。

这个“统一系统”本质上是 Lorenz 系统和 Chen 系统的凸组合。然而，它代表了由中间无穷多个混沌系统组成的整个族，而 Lorenz 系统和 Chen 系统是它的两个极端例子：当 $\alpha = 0$ 时，它是 Lorenz 系统；当 $\alpha = 1$ 时，它成为 Chen 系统；当 α 在 0 与 1 之间变化时，所有的系统均保持混沌状态。

后来，仍然在 2002 年，我们意识到存在着一大类一般的混沌系统 — 广义 Lorenz 系统族，或广义 Lorenz 规范式(GLCF) [1]。GLCF 是按照系统代数结构定义的，前面所有提到过的混沌系统都是它的一个特例。这个混沌系统族只有一个参数，满足 $-1 < \tau < +\infty$ ，但在 $-\infty < \tau \leq -1$ 时没有定义。在 GLCF 中，Lorenz 系统满足 $0 < \tau < +\infty$ ；Lu 系统满足 $\tau = 0$ ；Chen 系统满足 $-1 < \tau < 0$ (细节见下面的定理 2.3)。显然，这意味着 Lorenz 系统、Lu 系统以及 Chen 系统在拓扑上是彼此不等价的。

值得一提的是，我们已经严格证明了[19]，GLCF 具有 Smale 马蹄和马蹄混沌，从而是 Shilnikov 意义下混沌的。

所有上面提到的系统以及它们的动力学分析在 Chen 与 Lu 最近出版的一本中文书中已经有了详尽的总结[6]。

本篇短文对 GLCF 进行回顾，并指出两个最新报告的混沌系统只是 GLCF 的特例。

2. 广义 Lorenz 规范式

Celikovsky 和 Vanecek 定义和分析了下面的混沌系统族[4]。

定义 2.1 下面的非线性系统在 R^3 空间中被称为是广义 Lorenz 系统(GLS)：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中， $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $\lambda_3 \in R$ ，矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ 且 $\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0$ 。GLS 称为是非平凡的，如果它至少有一个解不趋于 0 或者无穷或者极限环。

Celikovsky 和 Chen 还定义和分析了下面更一般的混沌系统族[1]。

定义 2.2 下面的非线性系统在 R^3 空间中被称为广义 Lorenz 规范式(GLCF)：

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} z + (cz) \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & \tau & 0 \end{bmatrix} z, \quad \lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0, \quad (6)$$

其中 $z = [z_1, z_2, z_3]^T$, $c = [1, -1, 0]$ ，参数 $\tau \in R$ 。

在 GLCF 中，只有一个实标量参数 τ ，确定系统的混沌行为，而特征值 $\lambda_{1,2,3}$ 满足一个(且只有一个)非常简单的不等式条件：

$$-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0, \quad (7)$$

它与熟知的 Shilnikov 条件有关。GLS 和 GLCF 可能的应用在文献[9]中有所讨论。

下面的结果，来源于文献[1]，阐明了 GLS 和 GLCF 之间的关系。

定理 2.3 存在一个非奇异单参数的线性坐标变换 $z = T_\tau x$ ，能把非平凡的 GLS (5) 转化成 GLCF (6)，其中 $\tau > -1$ 。

注 2.4 对于 GLCF，上面的线性变换在 $-\infty < \tau \leq -1$ 上没有定义。Lorenz 系统满足 $0 < \tau < +\infty$ ；Lu 系统满足 $\tau = 0$ ；Chen 系统满足 $-1 < \tau < 0$ 。这样，再一次地，我们可以清楚地看出 Lorenz 系统、Lu 系统以及 Chen 系统是拓扑不等价的。

人们可能会问当 $\tau \leq -1$ 时 GLCF 是什么样子。在这种条件下，存在着另一个一般的动力学系统族，称为双曲线型广义 Lorenz 系统(HGLS)。Celikovsky 和 Chen 在文献[2]中对其给出了定义和进行过分析。

定义 2.5 下面的非线性系统在 R^3 空间中被称为双曲线型广义 Lorenz 系统(HGLS)：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (8)$$

其中， $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ ， A 是一个 (2×2) 实矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ ，且 $\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0$ 。该 HGLS 称为是非平凡的如果它至少有一个解不趋于 0 或者无穷或者极限环。

注 2.6 在某种意义上，HGLS 和 GLS 是对偶的。这里，“双曲线型”暗示着系统的线性部分的矩阵对 Lorenz 系统有特征值 $\{0, \pm j\}$ ，而对 HGLS 有特征值 $\{0, \pm 1\}$ 。

尽管看上去(8)和(5)只有微小的差别，但理论分析和计算机仿真已经证实 HGLS 代表着 一类非常不同的混沌系统。把这两种模式结合起来，便得到了下面的 HGLS 规范式。

定理 2.7 对于任意的 $\tau \neq -1$ ，系统(6)状态等价于下面的系统：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} x + x_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sgn}(\tau + 1) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (10)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)(\tau + 1)^{-1}, \\
a_{12} &= -(\lambda_2 - \lambda_1)(\tau + 1)^{-1}, \\
a_{21} &= \lambda_1 - \lambda_2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(\tau + 1)^{-1}, \\
a_{22} &= \lambda_2 - (\lambda_2 - \lambda_1)(\tau + 1)^{-1},
\end{aligned} \tag{11}$$

等价性通过下面的坐标变换得到：

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt{|\tau + 1|}(z_1 - z_2), \\
x_2 &= \sqrt{|\tau + 1|}(z_1 + z_2), \\
x_3 &= |\tau + 1|z_3.
\end{aligned} \tag{12}$$

注 2.8 定理 2.7 意味着 GLCF 在 $\tau > -1$ 时等价于 GLS；而在 $\tau < -1$ 时等价于 HGLS。注意， $\tau = -1$ 的情形在(10)中也能够被很好地定义，但不是通过变换式(11)-(12)。另外注意，这种情形既不等价于 GLS 也不等价于 HGLS。这样，它不能归类到文献[1,2]中的 GLCF 里去。事实上，它是双曲线和非双曲线之间的一个转换。因为这两种情形在非线形部分有着本质上不相同的结构，所以它们不能从一种情形连续地过渡到另一种情形。对于系统(6)或(10)，很容易看出 $\tau = -1$ 时它能够产生混沌，因为它与 $\tau < -1$ 时的情形有着相似的特征，这可以由下面的两个例子确认。

3. 两个特例

这里将要讨论的两个特例进一步反映了参数值 $\tau = -1$ 在 GLCF(6)中所起的重要作用。

3.1 Shimidzu-Morioka 系统

经过直接但有点冗长的代数计算可以证明下面从一个系统到另一个系统的转换。

命题 3.1 GLCF(6)在 $\tau = -1$ 时等价于 Shimidzu-Morioka 系统[15]

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = y \\ \frac{dy}{d\theta} = x(1 - z) - \lambda y \\ \frac{dz}{d\theta} = -\alpha z + x^2 \end{cases} \tag{13}$$

其转换可通过下面的线性时间—状态变换来实现：

$$\begin{cases} x = (z_1 - z_2) \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(-\lambda_1 \lambda_2)^{3/2}}} \\ y = (\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2) \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(-\lambda_1 \lambda_2)^{5/2}}} \\ z = z_3 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \\ \theta = t \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}, \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\lambda = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}}, \quad \alpha = \frac{\lambda_3}{\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}}. \quad (15)$$

3.2 Liu-Liu-Liu-Liu 系统

文献[10]介绍与研究了下面的混沌系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - kz \\ \dot{z} = -cz + hx^2, \end{cases} \quad (16)$$

其中， a, b, c, k, h 是正数。

首先，注意到在系统(16)的参数集 $\{a, b, c, k, h\}$ 中某些多余的项可以去掉。对于线性坐标变换，只有 a, b, c 是最基本的。其实，不失一般性， k, h 可以设置为 1。我们在[3]中证明了如下的结果：

命题 3.2 对于任意的 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 和任意的 $k, h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ，系统(16)等价于

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = a(\hat{y} - \hat{x}) \\ \dot{\hat{y}} = b\hat{x} - \hat{x}\hat{z} \\ \dot{\hat{z}} = -c\hat{z} + \hat{x}^2, \end{cases} \quad (17)$$

其转换可通过下面的线性坐标变换来实现：

$$\begin{cases} \hat{x} = x\sqrt{hk} \\ \hat{y} = y\sqrt{hk} \\ \hat{z} = kz. \end{cases} \quad (18)$$

文献[3]证明了，系统(17)状态等价于 $\tau = -1$ 时的 GLCF(6)。也就是说，在这两个系统的参数集之间存在着——对应的关系：带有 $\tau = -1$ 的 GLCF(6) 对应着一个(且仅有一个)系统(17)，反之亦然，如下面的结果[3]所示。

命题 3.3 对任意的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ，满足 $\lambda_2, \lambda_3 < 0, \lambda_1 > 0$ ， $\tau = -1$ 时的 GLCF(6) 状态等价于系统(17)，其转换可通过下面的线性坐标变换来实现：

$$\begin{aligned}
a &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \\
b &= (\lambda_1 \lambda_2) / ((\lambda_1 + \lambda_2)) \\
c &= \lambda_3.
\end{aligned}
\tag{19}$$

反过来，系统(17)状态等价于 $\tau = -1$ 且 $a, b, c > 0$ 时的 GLCF(6)，其转换可通过下面的线性坐标变换实现：

$$\begin{cases}
\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 + 4ab} \right) \\
\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(-a - \sqrt{a^2 + 4ab} \right) \\
\lambda_3 = c.
\end{cases}
\tag{20}$$

另外，下面的推论可由命题 3.1 直接得出。

推论 3.4 系统(16)状态等价于 Shimidzu-Morioka 系统(13)，其转换可通过线性时间-状变换实现变换实现。

注 3.5 推论 3.4 表明，系统(16)可以通过一个同胚变换从系统(13)得到。因此，Liu-Liu-Liu-Liu 系统(16)不是新的，它只是 Shimidzu-Morioka 系统(13)的一种变换了的形式。

注 3.6 在推论 3.4 中，如果 $a = \lambda, b = \lambda^{-1}$ 的话，时间变换不必使用，其中 λ 如在(15)中那样定义。这很容易证实，因为非奇异坐标变换在任一平衡点处保留了系统线性部分的特征多项式。

总而言之，广义 Lorenz 规范式(GLCF)可以用来对与经典 Lorenz 系统相关的一大族不同的混沌系统进行分类，如表 1 所示。

表 1：GLCF 及其特殊系统

GLCF	等价系统
$\tau \in (-\infty, -1)$	HGLS [2]
$\tau = -1$	Shimidzu-Morioka 系统 [15]
$\tau \in (-1, 0)$	GLS 且 $a_{21}a_{12} < 0$; Chen 系统 [7]
$\tau = 0$	GLS 且 $a_{21}a_{12} = 0$; Lu 系统 [12]
$\tau \in (0, \infty)$	GLS 且 $a_{21}a_{12} > 0$; Lorenz 系统 [11]

参考文献

- [1] Celikovsky, S., G. Chen, On a generalized Lorenz canonical form of chaotic systems, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 12 (2002), 1789-1812.
- [2] Celikovsky, S., G. Chen, Hyperbolic-type generalized Lorenz system and its canonical form, in *Proceedings of the 15th Triennial World Congress of IFAC*, Barcelona, Spain, July 2002, CD ROM; available at <http://www.ee.cityu.edu.hk/~gchen/chaos-bifur-conferences2.html>
- [3] Celikovsky, S., G. Chen, On the generalized Lorenz canonical form, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26 (2005), 1271-1276.
- [4] Celikovsky, S., A. Vanecek, Bilinear systems and chaos, *Kybernetika*, 30 (1994), 403-424.
- [5] Chen, G., X. Dong, *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives, and Applications*, World Scientific Pub. Co., Singapore 1998.
- [6] Chen, G., J. Lu, *Dynamics of the Lorenz Systems Family: Analysis, Control and Synchronization* (in Chinese), Science Press, Beijing, 2003.
- [7] Chen, G., T. Ueta, Yet another chaotic attractor, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 9 (1999), 1465-1466.
- [8] Li, T. C., G. Chen, Y. Tang, On stability and bifurcation of Chen's system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 19, 1269-1282, 2004.
- [9] Lian, K., P. Liu, Synchronization with message embedded for generalized Lorenz chaotic circuits and its error analysis, *IEEE Trans. Circ. Syst.-I*, 47 (2000), 1418-1424.
- [10] Liu, C., T. Liu, L. Liu, K. Liu, A new chaotic attractor, *Chaos, Solitons and Fractals*, 22 (2004), 1031-1038.
- [11] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141, 1963.
- [12] Lu, J., G. Chen, A new chaotic attractor coined, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 12, 659-661, 2002.
- [13] Lu, J., G. Chen, D. Cheng, S. Celikovsky, Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 12 (2002), 2917-2926.
- [14] Shilnikov, A.L., L.P. Shilnikov, D.V. Turaev, Normal forms and Lorenz attractors, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 3 (1993), 1123-1139.
- [15] Shimizu, T., N. Morioka, On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model, *Phys. Lett. A* 76(3-4) (1976), 201-204.
- [16] Sparrow, C., *The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos, and Strange Attractor*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [17] Ueta, T., G. Chen, Bifurcation analysis of Chen's equation, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 10 (2000), 1917-1931.
- [18] Vanecek, A., S. Celikovsky, *Control Systems: From Linear Analysis to Synthesis of Chaos*. Prentice-Hall, London 1996.
- [19] Zhou, T. S., G. Chen, S. Celikovsky, Shilnikov chaos in the generalized Lorenz canonical form of dynamics systems, *Nonlinear Dynamics*, 39 (2005), 319-334.
- [20] Zhou, T. S., G. Chen, Y. Tang, Chen's attractor exists, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 14 (2004), 3167-3178.
- [21] Zhou, T. S., G. Chen, Y. Tang, Complex dynamical behaviors of the chaotic Chen's system, *Int. J. of Bifur. Chaos*, 13 (2003), 2561-2574.
- [22] <http://risa.is.tokushima-u.ac.jp/~tetsushi/chen/>