

阿尔福斯

——二十世纪最杰出的复变函数理论家

陈关荣

菲尔兹奖是在国际数学联盟 (International Mathematical Union) 主办的国际数学家大会上颁发的一个重要奖项。该奖项根据加拿大皇家学会院士、数学家菲尔兹 (John Charles Fields) 的意愿以他的遗产设立, 每四年颁发一次, 授予当年元旦前未满 40 岁的有卓越贡献的优秀数学家。按规定每次最多可有四位获奖人, 每人一枚金质奖章和 1500 美元奖金。

第一次菲尔兹奖于 1936 年颁发, 授予 29 岁的芬兰数学家 Lars Valerian Ahlfors 和 39 岁的美国数学家 Jesse Douglas。Ahlfors 证明了法国数学家 Arnaud Denjoy 在 1907 年提出的一个猜想, 即“全纯函数的不同有限渐近值的个数不大于该函数阶的两倍”, 并发展了复变函数和黎曼曲面的几何分析方法; Douglas 则证明了由意大利裔法国数学家拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange) 于 1760 年提出、后来由意大利数学家普拉托 (Joseph A. F. Plateau) 总结出来的一个数学问题, 即给定边界的最小曲面的存在性。

Ahlfors 是二十世纪最杰出的一位复变函数理论家。他在荣获菲尔兹奖半个世纪之后, 于 1981 年因对复变函数基本理论的贡献及其几何分析方法的创立而荣获沃尔夫数学奖。该奖项是沃尔夫基金会在 1978 年设立并开始颁发的年度数学奖, 表彰成果丰硕的资深数学家的终身成就。基金会由知名犹太人工业家沃尔夫 (Ricardo Wolf) 于 1975 年设立。这里顺便提及, 著名数学家陈省身也获得过沃尔夫数学奖, 而像 Ahlfors 那样获得菲尔兹和沃尔夫两项大奖的华裔数学家有丘成桐。



拉尔斯·阿尔福斯 (1907-1996)

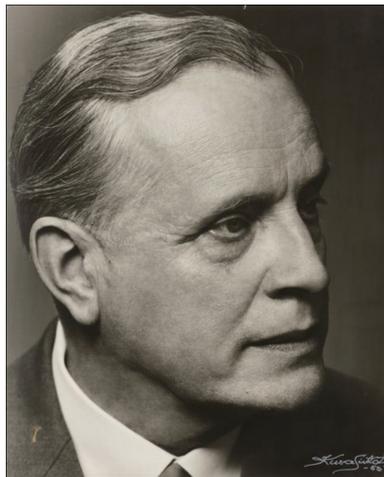
【一】生平

阿尔福斯于1907年4月18日出生在芬兰赫尔辛基。他家至少从爷爷一代开始就居住在奥兰群岛（Åland Islands）。该群岛是芬兰的一部分，但大部分居民是瑞典人而且全岛只说瑞典语。“阿尔福斯”是典型的瑞典姓氏，他一家几代人也都只说瑞典语。父亲阿克塞尔（Karl Axel M. Ahlfors）出生在奥兰群岛，年轻时是一名机械工程师，后来成为赫尔辛基理工学院的工程学教授。母亲赫兰德（Sievä Helander）在生下阿尔福斯时难产去世。他有两个姐姐：Aune 和 Isa。父亲后来再婚，有一个小女儿。

阿尔福斯小时候在赫尔辛基一间瑞典语私立学校读书。在学校里，他开始学习芬兰语，同时也学习德语、英语和法语。在家里，阿尔福斯三岁时起父亲经常问他一些简单有趣的数学问题，因此他从小就对数学着迷。他并不是神童，在家里跟着两个小姐姐学习数学。他喜欢读书，最大的乐趣是做数学习题。但他不喜欢运动，总觉得周末和假日不上学很无聊。他喜欢学习各种语言，而最不喜欢学习的是历史课。此外，他学会了拉大提琴。在家里，父亲对他的学习从来都不施加压力。他后来回忆道：“在见过许多同辈天才少年被望子成龙过于心切的父母逼成庸才之后，我非常感谢父亲的克制。当年我们的高中课程并不包括微积分，但我设法自学了一些。这要归功于我经常偷偷地去看父亲家藏的工程学书籍。”起初，父亲希望他成为一名工程师，但意识到他对数学充满热情却无法掌握好机械知识时，父亲便改变了想法，希望他成为一名数学教授。



林德洛夫（1870–1946）



奈望林纳（1895–1980）

阿尔福斯1924年中学毕业后就读于赫尔辛基大学，并于1928年春毕业，获哲学学士学位。他决定留校继续学习数学，成为了林德洛夫（Ernst Leonard Lindelöf）和奈望林纳（Rolf Herman Nevanlinna）两位教授的研究生。

林德洛夫教授是自学成才的数学家，被誉为“芬兰数学之父”，因为上世纪二十年代芬兰的所有数学家都是他的学生，包括奈望林纳。因此，阿尔福斯是奈望林纳的学生也是他的师弟。奈望林纳后来在数学界声望很高。1962年，奈望林纳担任国际数学家大会主席。当年，他还是国际数学联盟主席和菲尔兹奖评选委员会主席。他这三位一体的学术地位，实属空前绝后。在1982-2018年间的国际数学家大会上，国际数学联盟不仅颁发以纯粹数学为主题的菲尔兹奖，还颁发一个以应用数学为主题的大奖——奈望林纳奖。该奖后来更名为国际数学联盟算盘奖（IMU Abacus Medal）。

1928年秋天，在瑞士苏黎世理工大学任教的德国数学家外尔开始学术休假，准备到美国访问一年。于是他邀请奈望林纳去苏黎世理工大学接替他的职位。阿尔福斯在导师林德洛夫的建议下跟随奈望林纳一同前往瑞士访学。当时，在苏黎世理工大学任职的匈牙利数学家波利亚（George Pólya）主持一系列的数学讨论班。奈望林纳在讨论班的多次演讲中介绍了复变函数论中一些悬而未决的重要问题，包括丹乔伊关于全纯函数渐近值个数的猜想。没想到，丹乔伊猜想引发了博士生阿尔福斯的强烈兴趣。

在苏黎世理工大学访学期间，阿尔福斯在奈望林纳和波利亚两位教授的指导下开始了有意义的数学研究工作。他基于自己发展的共形映射（conformal mapping）方法对全纯函数渐近值分布做出了很好的研究结果。他非常感激两位教授为他提供了“相当大的帮助”。可是两位教授却认为，那是阿尔福斯自己完成的主要工作，他们坚持要求学生仅以自己的名义去发表文章。多年之后，阿尔福斯还很认真地说：“后来我一直试图通过不接受与学生合著文章的方式来偿还我欠他们两位的债务。”

1929年，阿尔福斯用自己发展的新方法证明了丹乔伊猜想，让它成为一条“丹乔伊-阿尔福斯定理”。这个令人惊诧的成果让时年21岁的阿尔福斯声名鹊起。在返回芬兰三个月前，阿尔福斯跟随奈望林纳前往巴黎，在那里他们见到了丹乔伊本人。丹乔伊高兴地说，现在21是他最喜欢的数字，因为他在21年前提出的猜想现在被一个21岁的年轻人证实了。后来，数学文献中有了一条“丹乔伊-卡勒曼-阿尔福斯定理”，其中的托斯顿·卡勒曼（Torsten Carleman, 1892-1949）是瑞典数学家，他在1933年发表了关于丹乔伊猜想的一个简洁证明，为后人所采用。

1930年，阿尔福斯从苏黎世返回芬兰后，在位于图尔库的一间瑞典语奥博大学（Åbo Akademi）获得了第一份教职，开始时担任代理讲师，后来成为常任讲师。在该校教书同时，他也注册为赫尔辛基大学的在职研究生，继续跟随林德洛夫和奈望林纳做函数论研究。1930-1932年间，阿尔福斯多次前往欧洲访学。期间，他获得洛克菲勒基金会奖学金资助，在巴黎停留了较长的时间。

1932年，阿尔福斯完成了学业。他的博士毕业论文题为“共形映射理论和全纯函数的研究”。

阿尔福斯获得博士学位后，随即在赫尔辛基大学担任数学助理教授。1933年，阿尔福斯与奥地利姑娘埃尔娜·莱纳特（Erna Lehnert）结婚。埃尔娜先是随父

Lars V. Ahlfors



阿尔福斯和他的三个女儿（奥地利，1950）

母从维也纳迁居到瑞典，然后迁居到芬兰。阿尔福斯夫妇俩养育有三个女儿，玛丽（Cynthia Mary）、伊丽莎白（Vanessa Elisabeth）、格特鲁德（Caroline Gertrud）和一个儿子克里斯托弗（Christopher）。

1935年，阿尔福斯发表了他关于黎曼曲面最重要的论文之一，其中他使用了特别构造的共形映射指标，并给出了他自己关于奈望林纳理论的几何版本。1935年，阿尔福斯到慕尼黑旅行时结识了希腊裔德国数学家卡拉西奥多里（Constantin Carathéodory）。卡拉西奥多里十分欣赏阿尔福斯关于全纯函数理论的研究成果，认为他开启了复变函数分析的全新篇章，并称之为“度量拓扑”。卡拉西奥多里主动推荐阿尔福斯到美国哈佛大学任职。他在回复哈佛数学系主任招聘咨询的信中写道：“这里有一个年轻芬兰人，阿尔福斯，你应该考虑聘请他。”于是阿尔福斯获得了哈佛大学以特别高薪雇请的客座讲师职位，随后于1936-1938年在哈佛大学任正式助理教授。

1936年，卡拉西奥多里被国际数学联盟委任为菲尔兹奖评审委员会成员。他后来回忆说，当时给阿尔福斯颁发菲尔兹奖的理由，很难说是因为他证明了丹乔伊猜想还是因为他用新颖的几何方法发展了奈望林纳理论（Nevanlinna theory）——因为后者也是令人惊讶的：奈望林纳在许多年里发展了一整套复变函数理论，阿尔福斯轻易地把它浓缩为十四页纸的内容。

阿尔福斯1936-1938年在哈佛任教期间，赫尔辛基大学发生了关于教学语



卡拉西奥多里 (1873-1950)

言的纷争，之后特别设立了瑞典语教授的职位。1938年，阿尔福斯应邀回到赫尔辛基大学担任瑞典语数学教授。然而，1939年底，苏联和芬兰之间发生了著名的“冬季战争”。阿尔福斯便将家人送往瑞典与亲戚同住，而他自己仍然留在赫尔辛基。虽然那时大学经常因战火而关闭，他躲在防空洞里却做了很多很好的数学研究。1944年夏天，阿尔福斯估计芬兰即将面临一个政治和经济都非常困难的时期，在奈望林纳的鼓励和帮助下，他决定前往瑞士苏黎世理工大学任职。阿尔福斯在赫尔辛基等待苏黎世方面的答复期间，抽空前往瑞典探望家人。到了瑞典，他的健康状况变得

很差，甚至心律不整。由于战争原故，他无法从瑞典前往瑞士，因而到苏黎世就职的机会微乎其微。1945年3月，在一个月黑风高的夜晚，阿尔福斯一家人乘坐一架刚修复好的美式“空中堡垒”旧飞机“出逃”。他们和其他十几名乘客一道，戴上氧气面罩并穿上救生衣，从斯德哥尔摩飞到了苏格兰的普雷斯蒂克。然后，他们坐火车到了格拉斯哥，再乘船横渡英吉利海峡到了法国迪耶普，又经巴黎横跨法国，才进入瑞士到达苏黎世。整段路程非常曲折艰辛。最令他夫妇痛苦的是，襁褓中的儿子 Christopher 在路上因意外事故不幸身亡。

可是，阿尔福斯在苏黎世理工大学过得并不愉快。他后来回忆道：“坦白地说，我在苏黎世过得不太开心。战后时代对于一个陌生人来说并不是在瑞士扎根的好时机。……我和我的妻子在自己同事圈子之外感到不受欢迎。”

1946年，在外尔的强力推荐下，哈佛大学邀请阿尔福斯回到哈佛任职正教授。两年之后，他被选为数学系主任。1964年，他获任哈佛大学格劳斯坦 (William Caspar Graustein) 数学讲座教授。顺便提及，多年之后丘成桐接任了这个数学讲座教授的职位。

阿尔福斯在哈佛工作直至1977年70岁时退休。之后，他和家人定居在波士顿地区。1996年10月11日，阿尔福斯在麻省皮茨菲尔德的一家疗养院因肺炎去世，享年89岁。



阿尔福斯在哈佛大学 (William Graustein 摄)

Carl Axel Malmsten

Lipman Bers

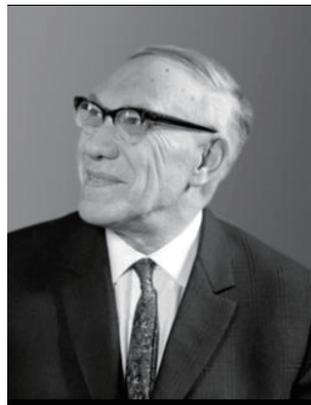
【二】成就



格罗茨奇 (1902-1993)

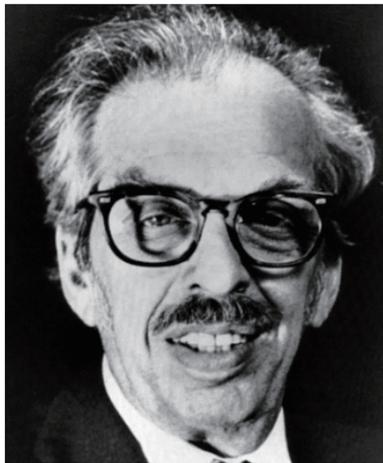


泰希米勒 (1913-1943)



拉夫连季耶夫 (1900-1980)

阿尔福斯毕生取得好几项重要数学成果。他不但证明了丹乔伊猜想，还推进了函数值分布理论并从几何角度推导出奈望林纳理论，又与德国数学家格罗茨奇 (Herbert Grötzsch) 和泰希米勒 (Paul Teichmüller) 以及苏联数学家拉夫连季耶夫 (Mikhail Lavrentiev) 等人一起，建立了拟共形映射 (quasi-conformal mapping) 理论。该理论后来在计算机图形学等工程技术中有很成功的应用。阿尔福斯和拉脱维亚裔美国数学家贝尔斯 (Lipman Bers) 合作，在德国数学家菲利克斯·克莱因 (Felix C. Klein) 引进的克莱因群方面做了许多重要工作。他开创性地研究了高维空间中的拟共形变形 (quasi-conformal deformations)。特别是，他将当时全新的拓扑学和微分几何学的方法引入到复变函数理论研究中，对黎曼曲面几何分析做出了一系列重要贡献。



贝尔斯 (1914-1993)

1981年，阿尔福斯获得了作为数学家终身成就标志的沃尔夫数学奖，奖励他“在几何函数理论中的开创性发现和强大新方法的创建”。颁奖词中说：“半个多世纪以来，复变函数理论一直受到荣休教授拉尔斯·阿尔福斯的思想和工作引导。他的成就包括证明了丹乔伊猜想，以几何方法推广了奈望林纳关于施瓦茨引理 (Schwarz lemma) 的重要理论，发展了极值长度 (extremal length) 方法，并获得黎曼曲面、拟共形映射和泰希米勒空间理论中的许多决定性的结果。阿尔福斯为克莱因群建立了有限性定理，他在极限集方面的工作重

振了一个重要的研究领域。他现在正在高维拟共形变形方面进行开创性工作。阿尔福斯的影响是广泛而有意义的。他的方法将深刻的几何洞察力与巧妙的分析技巧结合起来，并以极其简单而清晰的方式表达出来。他一次又一次地尝试并解决整个学科的中心问题，而其他数学家则一次又一次地受到他多年前所做工作的启发。”

阿尔福斯作为教授指导了 24 名博士生和差不多同样数量的客座和博士后研究人员。他还出版了几本影响深远的专著和教科书，其中最著名的是 1953 年出版的《复分析》，它在整个二十世纪下半叶保持了复变函数论核心教科书的地位。阿尔福斯其他专著包括 1960 年与师弟萨里奥 (Leo Sario) 合著的《黎曼曲面》、1966 年的《拟共形映射讲义》和 1973 年的《共形不变量讲义》，都是领域中的经典读物。



阿尔福斯的主要著作

阿尔福斯在他的职业生涯中获得过许多荣誉和奖励。除了菲尔兹奖和沃尔夫奖之外，他还获得 1960 年美国工业和应用数学会的冯·诺伊曼讲座奖以及 1982 年美国数学会的斯蒂尔奖 (Leroy P. Steele Prize)。他在 1986 年担任国际数学家大会名誉主席，是唯一被三次邀请到国际数学家大会上作大会报告的数学家。他获得过美国波士顿大学、芬兰奥博大学、瑞士苏黎世大学和英国伦敦大学授予的荣誉博士学位，还被遴选为芬兰国家科学院、瑞典皇家科学院、丹麦皇家科学院和美国国家科学院院士。

【三】为人

也许是因为小时候喜欢到学校上课的缘故，阿尔福斯毕生都乐意并认真地教书。他被学生和同事铭记为一位谦恭优雅的君子、一个和学生愉快相处的导

Lars V. Ahlfors

Liam V. Ahlfors



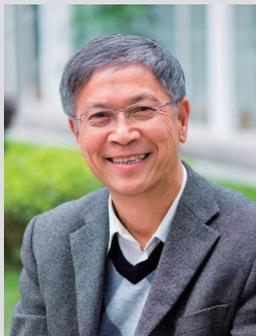
阿尔福斯夫妇（晚年照片）

师。他性格内向，但喜欢美食、美酒和聊天，而且他很特别——总是在渴望第二天的工作。

人们常说名人总有轶事，事实上阿尔福斯也不例外。

1991年6月的一天，普林斯顿大学出版社编辑阿尔伯斯（Donald J. Albers）来到缅因州 East Boothbay，在阿尔福斯家庭小屋里采访了他。对话中，他们绝大部分时间都在回顾阿尔福斯的生平和他所做的数学。在访问结束前，阿尔福斯被问到他对物理学的看法。他非常明确地回应道：“我不相信物理学！”“物理学家离数学如此之近，但他们不懂数学。”“也许物理学家对数学很重要，但对我来说在任何意义下他们都不可能是重要的。我认为数学家不应该从物理学那里获取他们的灵感。”——呵，这听起来真有点像英国剑桥大学的著名数学家哈代，他认为“真正数学家的真正数学（无论其为应用数学或纯粹数学），即费马、欧拉、高斯、阿贝尔、黎曼的数学，几乎全部都是无用的。”他说“我从未做过任何有用的事情。”

前面提到过，在第二次世界大战末期的1944年夏天，阿尔福斯从芬兰赫尔辛基前往瑞典看望家人。当时，他除了随身携带的菲尔兹金质奖章以外，只有10克朗的零钱。明知战争时期任何东西一旦离开自己，很可能便会永远消失，他还是毫不犹豫地把奖章拿到当铺去典当，凑足了钱买火车票。多年以后，阿尔福斯回忆起这件事时说：“获得菲尔兹奖带给了我一个很实在的好处——它让我凑够了路费。”阿尔福斯非常肯定地说：“我确信那是唯一在当铺里停留过的菲尔兹奖章。”不过，读者先不忙为他惋惜。阿尔福斯接下来笑着补充说：“后来我一有钱便请瑞士的朋友帮我把它赎回来了。”



作者简介：

陈关荣，香港城市大学电机工程系讲座教授，欧洲科学院院士和发展中国家科学院院士。