

阿诺德——毕生追求“发现”乐趣的数学家

陈关荣

(香港城市大学)

弗拉基米尔·阿诺德 (Vladimir Igorevich Arnold, 1937年6月12日—2010年6月3日) 是公认的 20 世纪最伟大的数学家之一。这里虽然有个“之一”，但还有个“最”字，因此绝对不同凡响。

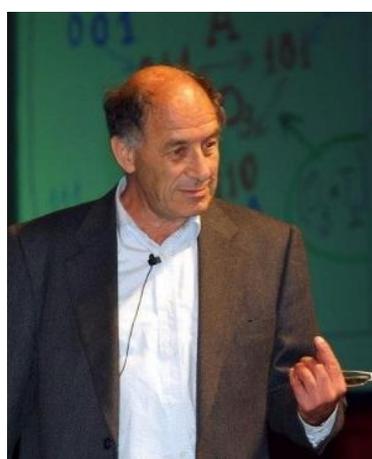


图 1 弗拉基米尔·阿诺德 (昵称 Dima)

【一】

阿诺德出生在乌克兰敖德萨 (Odessa)，当时乌克兰属于苏联，但再往前到公元 9 世纪则是基辅罗斯国。阿诺德的父亲叫伊戈尔 (Igor V. Arnold, 1900-1948)，是个数学家，在阿诺德 11 岁时去世；母亲妮娜 (Nina A. Isakovich, 1909-1986) 是个艺术历史学家。阿诺德祖辈几代人都是科学家，而他本人后来成为家族的第四代数学家。

阿诺德小时候，用他自己的话说，“我一直讨厌死记硬背。因此小学老师对我父母说，像我这样的低能儿永远掌握不了乘法表。”

第一个引起阿诺德对数学感兴趣的是一位名叫伊万·莫罗兹金 (Ivan V. Morozkin) 的老师。老师给小学生阿诺德一道算术题：两位女子从两个地方同时出发相向而行；她们走路快慢不一样，但正午 12 点在旅途上相遇了；之后，她们分别在下午 4 点和 9 点到达对方的出发地点；问她们是早上几点钟出发的？那时阿诺德没有学过代数，但他用自己的算术解法找到了答案。这道数学题的解决给他带来了“发现”的乐趣。

阿诺德 13 岁时，一位当工程师的叔叔跟他讲解微积分并用来解释一些物理现象，大大激发了他对数学的兴趣。于是他开始自学父亲留给他的一些数学书籍，其中包括欧拉和厄密特的著作。

阿诺德中学毕业后进入了莫斯科国立罗蒙诺索夫大学（简称莫斯科国立大学）。在那里，他的指导老师是著名数学家安德烈·柯尔莫哥洛夫（Andrey N. Kolmogorov, 1903-1987）。

1956 年，柯尔莫哥洛夫证明了一条重要的数学定理：任意有限个变量的连续函数总可以约化为三个变量连续函数的叠加。半个多世纪之前即 1900 年，大卫·希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）在巴黎第二届国际数学家大会上做了题为“数学问题”的著名演讲，条列了他认为最重要的 23 个数学问题，其中第 13 问题说上面的约化表示不可能简单到只含有两个变量。在柯尔莫哥洛夫指导下，当年 19 岁的大三学生阿诺德，证明了这个要求是可以实现的，即任何有限个变量的连续函数都可以用有限数量的两个变量的连续函数的叠加来表示，否定了希尔伯特第 13 问题的猜想。这个漂亮的结果后来被称为“柯尔莫哥洛夫-阿诺德表示定理”。阿诺德因此于 1958 年荣获莫斯科数学学会颁发的青年数学家奖。



图 2 阿诺德（莫斯科国立大学，1957）

1959 年，阿诺德从莫斯科国立大学数学力学系毕业，之后留校任教。在那里，他于 1961 年获莫斯科应用数学研究所授予博士候选人学位，论文题目是“On the representation of continuous functions of three variables by the superpositions of continuous functions of two variables”，就是上面提到的解决希尔伯特第 13 问题的工作总结及相关研究。1963 年，他获莫斯科应用数学研究所授予正式博士学位，论文题目是“Small denominators and stability problems in classical and celestial mechanics”。1965 年，阿诺德在莫斯科国立大学晋升为教授。1986 年，他转到了莫斯科 Steklov 数学研究所工作。从 1993 年开始，他在法国巴黎 Dauphine 大学兼职，通常春夏天在巴黎、秋冬季在莫斯科，至 2005 年为止。期间，1999 年他在巴黎遇到严重自行车事故，导致创伤性脑损伤。虽然他在几个星期后恢复了意识，但留下健忘症，在医院有一段时间甚至认不出自己的妻子。不过他后来恢复得很好。

2010 年 6 月 3 日，他因急性胰腺炎在巴黎辞世，享年 73 岁。他的遗体被送回莫斯科，安葬在 Novodevichy 修道院。



图3 阿诺德墓碑（莫斯科）

【二】

阿诺德是苏联-俄罗斯数学学派承前启后的人物，他的学术贡献广泛、丰富而且深刻。

阿诺德在数学和物理多个领域做出了重要贡献，包括微分方程、动力系统、拓扑学、突变论、实数代数几何、辛几何、变分法、经典力学、流体力学、磁流体动力学以及奇点理论，其中好几个方向都是开创性的，特别是在动力系统和辛几何方面。阿诺德对奇点理论的贡献丰富了突变理论并改变了这一领域的面貌和进程。他关于哈密顿辛同胚与拉格朗日截面不动点的猜想推动了后来的 Heegaard Floer 同调性理论发展。

阿诺德最出名的可能是他参与的动力系统理论中的 KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) 定理，其背景是太阳系稳定性这个历史悠久的三体问题。研究起源于柯尔莫哥洛夫留给阿诺德在读大学二年级学生们的一次相关课外作业。后来建立起来的定理刻画了可积哈密顿系统受微小扰动后其解的长期性态，被认为是牛顿力学在 20 世纪的一个重大进展。定理最先由柯尔莫哥洛夫在 1954 年世界数学家大会上的报告中提出，大意是非退化的可积哈密顿系统在保守的微小扰动作用下，虽然系统某些解的不变环面一般都会受到破坏，但仍会有相当多的环面被保存下来，即相空间中仍然保留有许多简单运动形态的相流。阿诺德把它推广到弱不可积系统，并通过对运动稳定性条件的分析，说明三维以上非线性系统的轨道运动出现混沌 (chaos) 现象具有普遍性。研究发现，破坏定理中的任何一个条件都会使系统的轨道运动变得混沌。这些论断后来分别由阿诺德和德国裔美国数学家于尔根·莫泽 (Juergen K. Moser, 1928-1999) 给出了严格的证明。当年莫泽在天体力学上已经颇有建树，他因对该定理的贡献于 1962 年应邀访问了莫斯科，后来又被邀请为《数学评论》写了一篇关于柯尔莫哥洛夫研究工作的评述，从而让这个重要结果广为人知。



图4 阿诺德和莫泽（圣彼得堡，1991）

与此同时，阿诺德还发现了一个极其重要而有趣的被称为“阿诺德扩散”的现象。他指出，在稳定的不变环面之间可能存在一些貌似随机的轨道在隐蔽地游荡。虽然这种复杂动力学行为的内在机制至今尚未清楚，但是阿诺德的分析清晰地描绘了有序与无序运动的共存和交错，那是今天周知的混沌系统的一个共同特征。

在混沌理论中广为人知的还有以他命名的“阿诺德猫映射”（Arnold cat map）和“阿诺德舌”（Arnold tongue）。

阿诺德猫映射由下面的迭代公式来定义：

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \pmod{1}$$

虽然这个迭代关系形式简单，但是它有好几个颇为优雅的特性：（1）它是对称可逆的，并且逆矩阵元素也是整数；（2）它的行列式等于 1，因此是保面积变换；（3）它是环面双曲自同构映射，有唯一的双曲型不动点；（4）它是拓扑传递的、遍历的和混合的；（5）它是结构稳定的，等等。这些性质保证了它具有典型的混沌特性。直观地说，它的迭代可以实现下面的图像变换：

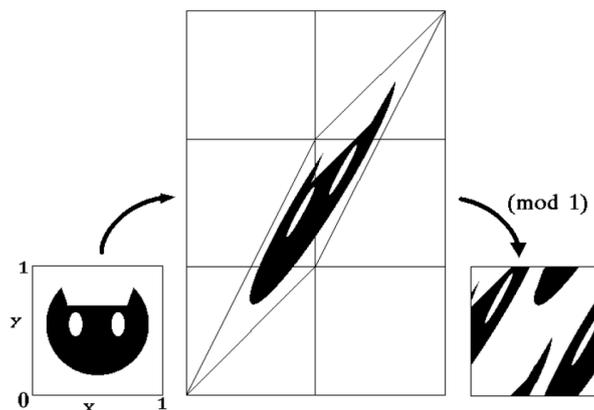


图5 阿诺德猫映射实现图像变换

这幅猫照片最早是阿诺德为解释他的迭代映射公式而使用的，因而得名“猫映射”。左边的猫照片经上述变换后变成了右边的照片，其中间步骤变大了的图像是用来解释原变换由变宽和变高两个变换复合而成的：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

这个复合变换完成之后，取模 1 的运算便把照片恢复到原来的尺寸。容易想象，用阿诺德的映射把猫照片反复迭代多次以后，最后映射出来的照片就完全不可辨认了，达到了信息隐藏的目的。因为映射可逆，混乱的照片可以还原。因此，这个混沌的猫映射在信息隐藏和数字保密通讯中简单好用，至今被广泛地用来作加密程序设计。

至于“阿诺德舌”，是在可视化一些动力系统的旋转数或某些不变属性时，根据其参数变化而产生的图像会产生像舌头形状的斑图。在涉及振荡特性的多种自然现象中，例如人体心电图、生物酶浓度变化以及锁相环电路等，经常都可以观察到周期振荡在相空间中的阿诺德舌图形。

1965 年，阿诺德参加了比利时数学家雷内·汤姆（René Thom, 1927-1975）在巴黎高等科学研究所（Institut des Hautes Etudes Scientifiques, IHES）举办的关于“突变”（catastrophe）理论的数学研讨会。这次活动，用阿诺德的话来说，“深刻地改变了我的数学世界”。此后，奇点理论（singularity theory）成为了阿诺德的主要研究兴趣之一，而他在该领域最著名的成果是对各种简单奇点的明确分类。阿诺德厘清了其中的光滑映射奇点并把它们准确清晰地描绘出来。他把奇点理论的研究目标定义为描述几何对象如何依赖参数微小变化下突然出现特大变化（即突变）的机理。

阿诺德还把昂利·庞加莱（Henri Poincaré, 1854-1912）的最后一个几何定理即“庞加莱-伯克霍夫定理”推广到高维，并作出了“阿诺德猜测”，将哈密顿辛同胚的不动点的数量与底层流形的拓扑联系起来，成为辛几何（symplectic geometry）数学分支后来许多开创性研究成果的动力和源泉。他和学生阿斯科尔德·霍万斯基（Askold Khovanskii, 1947-）一起，还开创了一门全新的拓扑伽罗华理论（topological Galois theory）。

此外，在经典力学方面，阿诺德对旋转刚体的欧拉方程和流体动力学的欧拉方程作出了一个统一的几何解释，把以前被认为不相关的两个主题有机地连接了起来。他还为许多与流体运动及其湍流相关的困难问题提供了数学解释和解答。例如，阿诺德对理想不可压缩流体的运动方程给出了一个非常优美的数学刻画，把它视为保体积微分同胚组成的无穷维李群上的测地线方程，进而清晰地揭示了流体运动内在不稳定性的几何根源。

【三】

阿诺德认为数学“是关于真理的科学”，“数学是物理学的一部分”，而物理学的本质是几何，因此他推崇物理和几何的思考方式。他还认为，数学是“发现”而不是“发明”。他毕生都在追求数学“发现”的乐趣。

阿诺德的教学指导思想和方法与法国布尔巴基（Bourbaki）学派截然相反。他经常直言不讳地批评数学高度抽象化和形式化的趋势，说：“在 20 世纪中叶，人们试图严格地区分物理学和数学，造成的后果是灾难性的。整整一代的数学家在对他们所从事的

科学的另一半极其无知的情况下成长，对其他的科学自然就更无知了。”为此，他还专门出版了《实验数学》（Experimental Mathematics）一书，指出严格的数学论证常常需要计算、试错、猜测以及数值验证，而不只是抽象的逻辑推理。

阿诺德以其严谨的数学描述、直觉的写作风格以及轻松的教学方式闻名。他在莫斯科和巴黎长期举办数学讨论班，坚持了约30年，培养了一批杰出的年轻数学家。他的学术著作包括传统的数学专业主题如《常微分方程》、《偏微分方程讲义》、《经典力学的数学方法》、《经典力学和天体力学中的数学论题》，当然也有非常专门的主题如《奇点理论》、《可微映射的奇点理论》、《突变理论》、《常微分方程的几何方法》、《实数代数几何》、《平面曲线和焦散曲线的拓扑不变量》、《动力学、统计学及伽罗华域上的投影几何》以及《动力系统：1-8卷》。其中，阿诺德的《经典力学的数学方法》一书特别有名，他用辛几何的框架给经典力学进行了一次彻底的改造。这本书被称为“几何力学的圣经”。然而，他一些书的写作有时候会受到批评，说他对于学科内容的处理很恰当，但常常省略了太多的细节，让学生无法像他本人那样毫不费力地证明那些艰深的定理。不过这时他会自辩，说他的书是写给“那些真正希望了解它的人”看的。阿诺德在平时教学中有一个习惯，就是给学生出大量的技巧性练习题，其中一批精选的题目收集在他的数学习题集《Arnold's Problems》之中。



图6 阿诺德学术著作选示

阿诺德对数学史非常感兴趣。他喜欢研究经典，最着迷的是惠更斯、牛顿和庞加莱的著作，并且多次在报告中去讨论他们作品中看到而尚未被探索的深刻思想。他还说通过学习菲利克斯·克莱因（C. Felix Klein, 1849-1925）的书《19世纪数学的发展》让他学到了很多数学历史和数学思想。

大家都知道数学巨匠欧拉在一生繁忙的数学研究中不仅亲自为青少年编写数学课本，撰写通俗科普读物，还经常抽空到大学和中学去讲课。欧拉晚年几乎双目完全失明，但他仍然给青年学生们编写了一本《关于代数学的全面指南》。事实上，很多大数学家都把数学科普教育和培养青少年一代视为己任。阿诺德也不例外。

1960 年代，阿诺德在莫斯科给中小学生们讲授群论。他后来回忆道：“我回避了任何的公理，尽可能让内容贴近物理。在半年内，我就教给了他们关于一般的五次方程不可解性的阿贝尔定理。以同样的方式，我还教给了小学生们复数、黎曼曲面、基本群以及代数函数的单值群。”这门课程的内容后来成书出版，名叫《问题中的阿贝尔定理》（The Abel Theorem in Problems）。

阿诺德还为青少年学生写了一本《讲义和问题：给年轻数学家的礼物》（Lectures and Problems: A Gift to Young Mathematicians），甚至还写了一本《给 5 至 15 岁儿童的数学问题书》（Problems for Children 5 to 15 Years Old），里面列出了 77 个非常有趣的初等数学问题和答案。他说，“2004 年春，我在巴黎写了这些问题。一些在巴黎的俄罗斯居民邀请我去协助他们培养一代有思想有文化的小孩子。在西方，俄罗斯的这一传统远远超过了别的俄罗斯传统。”



图 7 阿诺德和数学班一位小女孩

阿诺德喜欢运动，小时候就经常去爬山和远足。后来在莫斯科的日子里，他经常和学生和同事们去长途滑雪、到莫斯科河冬泳、骑自行车越野、甚至会扬帆出海好几天。他很有个性，争论时语言激烈尖锐是众所周知的，特别到了晚年脾气还变得有些暴躁。数学坊间关于阿诺德的小故事颇多，这里只讲他两则轶事。

阿诺德对学术界里拉帮结派的现象非常反感。他曾引用莫斯科国立大学的数学家老师伊万·彼得罗夫斯基（Ivan G. Petrovsky, 1901-1973）的话，说“真正的数学家决不会拉帮结派，只有弱者为了生存才会加入帮派。他们可以联结很多各方面的人，但其本质总是为了解决自我的社会生存问题。”

另外，没有记录说阿诺德参加过奥林匹克数学竞赛。他似乎对此不以为然。在 2012 年美国数学学会《Notices of the AMS》杂志的一次访谈中，阿诺德说：“当 90 岁的阿达玛（Jacques S. Hadamard, 1865-1963）向柯尔莫哥洛夫描述他参加 Concours Général（大致相当于我们的数学奥林匹克）的情景时，他依然很兴奋。当年阿达玛只得了个二等奖，而获得一等奖的那个学生后来也成为数学家，但比阿达玛差多了！一些奥林匹克冠军后来一事无成，而许多杰出的数学家并没有获得过奥林匹克奖牌。”当然，凡事不绝对，例如陶哲轩（Terence Chi-Shen Tao, 1975-）就是个例外。

【四】

阿诺德一生荣获的主要奖励条列如下：

1965 年，阿诺德和导师柯尔莫哥洛夫一起荣获列宁奖（苏联国家奖）；

1982 年，获克拉福德（Crafoord）奖，表彰他对非线性微分方程理论的贡献；

1983 年，被选为美国科学院外籍院士；

1984 年，被选为巴黎科学院外籍院士；

1987 年，被选为美国艺术与科学院外籍院士；

1988 年，被选为伦敦皇家学院外籍院士；

1990 年，当选为苏联科学院（1991 年后成为俄罗斯科学院）院士；

1992 年，获俄罗斯科学院罗巴切夫斯基（Lobachevsky）奖；

1994 年，获以色列哈维（Harvey）奖，表彰他对动力系统、奇点理论和几何分析的贡献；

1996 年，出任莫斯科数学学会主席，至 2010 年；同年，出任国际数学家联盟副主席兼执行委员，至 2002 年；

1997 年，获俄罗斯自然科学院卡皮察（Kapitsa）科学发现奖章；

2001 年，获美国物理学会海涅曼（Heineman）数学物理奖，表彰他在动力系统和奇点理论及其在经典力学、天体物理学、统计力学、流体力学和光学应用中的奠基性贡献；

2001 年，获沃尔夫（Wolf）奖，表彰他“对很多个不同数学学科做出了重大贡献；他的许多研究论文、书籍和讲座，加上他深厚的学识和高度的热情，对整整一代数学家产生了深远的影响”；

2007 年，获俄罗斯国家奖；

2008 年，获邵逸夫数学科学奖，表彰他“对数学物理广泛而深远的杰出贡献”。

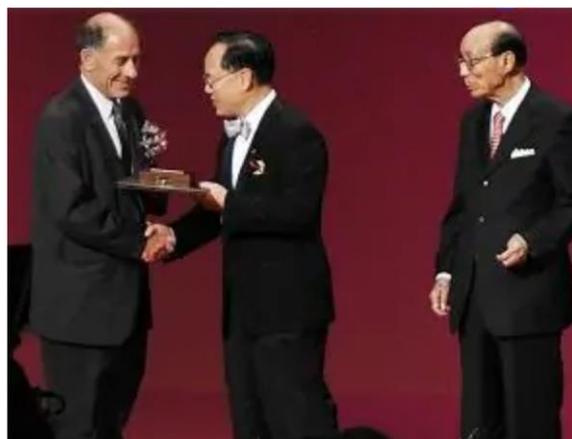


图 8 邵逸夫数学科学奖颁奖典礼（2008）
（左：阿诺德；中：香港特首曾荫权；右：邵逸夫）

此外，阿诺德还获得多所大学授予荣誉学位，包括：巴黎 P-M 居里大学（1979）、英国 Warwick 大学（1988）、荷兰 Utrecht 大学（1991）、意大利 Bologna 大学（1991）、西班牙马德里 Complutense 大学（1994）和加拿大多伦多大学（1997）。

最后值得提及的是，1974 年 37 岁的阿诺德获国际数学联盟菲尔兹奖章（Fields medal）提名。可是，由于苏联政府的干预，该奖项最后被撤回。原因是阿诺德在 1968 年参与了苏联 99 位数学家联名的一封公开信，要求政府释放因不同政见而被关进精神病院的数学家亚历山大·叶赛宁-沃尔平（Alexander Esenin-Volpin, 1924-2016）。他不但失去了应得的菲尔兹奖，在 1970-1980 年代十多年时间里还不被允许出国参加国际会议和学术活动。实际上，那 99 位签名的数学家中还有 1970 年菲尔兹奖获得者、拓扑学家谢尔盖·诺维科夫（Sergei P Novikov, 1938-），当年同样被禁止出国领奖。诺维科夫在 2005 年也获得沃尔夫奖。此前，另一位乌克兰出生的苏联数学家伊斯雷尔·盖尔范德（Israel M. Gelfand, 1913-2009）也因为是在 99 人之一，1978 年获沃尔夫奖后被禁止出境领奖，结果十年后才有机会去补领奖章。



图 9 阿诺德（2006）

【五】

和阿诺德颇有缘份的一位重要数学家是史蒂夫·斯梅尔（Stephen Smale, 1930-）。

阿诺德在 1995 年的一次学术访谈中回忆道：“1961 年斯梅尔来莫斯科访问，他是我遇到的第一位外国数学家。他对俄罗斯在动力系统方向的研究以及对我个人的影响都是巨大的。”斯梅尔当年第一次访问莫斯科，期间他见到了柯尔莫哥洛夫、阿诺德、德米特里·阿诺索夫（Dmitri V. Anosov, 1936-2014）和雅科夫·西奈（Yakov G. Sinai, 1935-），告诉了他们一个猜想，即有无穷多周期轨道的结构稳定系统可能存在。该系统后来被发现具有“斯梅尔马蹄”（Smale Horseshoe）。

斯梅尔于 1995-2001 以及 2009 之后很长一段时间都在香港城市大学工作。他在 2012 年美国数学学会《Notices of the AMS》杂志纪念阿诺德的专刊中回忆说：“在 1995 年秋季学期，阿诺德应邀访问香港……我也刚到香港工作。他和我经常一起去香港郊野公园徒步远足。他的体能相当令人佩服。那时，……我们发现在大多数有争议的数学问题中我俩都站在同一边，尤其是突变理论。”

1998年，时任国际数学家联盟副主席的阿诺德受希尔伯特23个问题的启发，邀请斯梅尔为新千禧之年的到来提出21世纪若干重要数学问题。于是斯梅尔提出了18个尚待解决的问题，后于1999年正式发布。其中，有3个问题目前已经得到解决：2001年澳大利亚数学家沃里克·塔克（Warwick Tucker, 1970-）证明了洛伦茨混沌吸引子的存在性；2003年俄罗斯数学家格里戈里·佩雷尔曼（Grigori Y. Perelman, 1966-）证明了庞加莱猜想，以及C. Beltrán, L. M. Pardo, F. Cucker, P. Bürgisser, P. Lairez等人各自部分完成的关于一个在平均意义下以多项式时间求解一个多项式方程组的问题。剩下的15个问题呢，包括了周知的黎曼猜想、 $N = NP$ 是否成立、希尔伯特关于极限环的第16问题、纳维-斯托克斯方程以及雅可比猜想等等，就留给新一代的数学家们了。

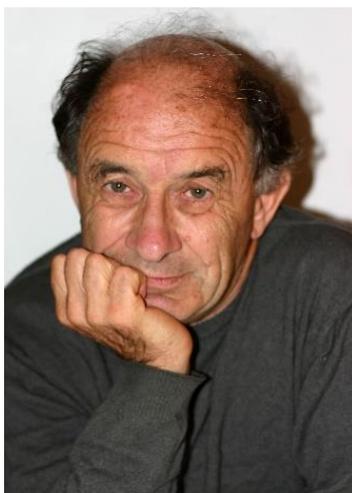


图 10 阿诺德（2008）