

布尔和他的逻辑代数，还有诗

陈关荣

纯数学是由布尔在一部他称之为思维规律的著作中发现的

——伯特兰·罗素

1 从 0 和 1 开始

大家都认同：我们生活在一个信息时代。

但你可能会问，怎样表达信息呢？

用 0 和 1 呗，十七世纪的德国人莱布尼茨早已回答了这个问题。

就用 0 和 1？这么简单，你怎么去计算信息呀？

这容易，十九世纪的英国人布尔笑了： $0+0=0$ ， $0+1=1$ ， $1+0=1$ ， $1+1=0$ 。

好吧，但你怎么做逻辑运算去处理信息呢？

噢，二十世纪的美国人香农说他有办法：这逻辑运算嘛，可以用“与”（and）、“或”（or）、“非”（not）三个基本“门电路”，把它们如下对应起来加以执行就可以了：

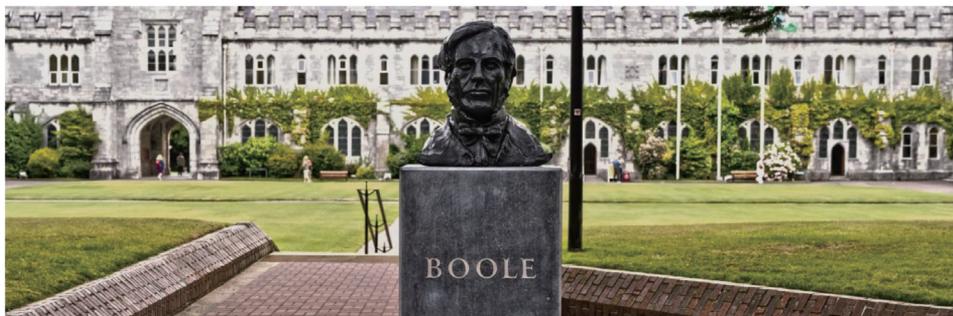
- $1 \text{ and } 1 = 1$; $1 \text{ or } 1 = 1$; $\text{not } 1 = 0$;
- $1 \text{ and } 0 = 0$; $0 \text{ and } 0 = 0$;
- $1 \text{ or } 0 = 1$; $0 \text{ or } 0 = 0$;
- $\text{not } 0 = 1$

哇，这些都有了，你马上明白：只要有“开”（代表 1）和“关”（代表 0）这两种基本操作的器件，电脑便能够表示、存储、传输和计算信息了！

2 布尔的生平故事

科学和技术的发展通常都经过许多人的承传接力，上面说的信息技术也不例外。不过，我们这里只讲布尔的故事。

乔治·布尔（George Boole, 1815 年 11 月 2 日 - 1864 年 12 月 8 日）出生



于英格兰的林肯郡郡府林肯市（镇）¹。父亲约翰是个颇为穷困的鞋匠，但对科学和算术有业余爱好，母亲玛丽安·乔伊斯是个佣人。布尔有一个妹妹玛丽安妮和两个弟弟威廉及查尔斯。

布尔自幼表现出对古典语言的特别兴趣，父亲便请一位卖书的朋友教了他一点拉丁文。布尔接着自学了一些希腊语，后来还自学了法语、德语和意大利语。布尔14岁时就读于林肯镇的一间技校（Bainbridge Commercial Academy），但16岁就因家境困窘而辍学，此后余生再也没有机会进入任何学校读书。他幻想过当一名牧师，但后来父亲生意衰落，他作为长子便担负起了支撑全家生活的责任。他到离家很远的唐卡斯特（Doncaster）镇找到一份工作，当一名小学助理教师。好处是，他有些课余时间可以自行学习和研究数学。据他自己解释，当年没有多少钱买书，而数学书可以慢慢看。据说他星期天做礼拜时还在看数学书，被认为是对神不敬，两年后就被解雇了。19岁的布尔回到老家林肯镇开办了一间小小寄宿学校，从事初等教育。

在林肯镇，布尔经常走访一家机械学院。该学院的院长是爱德华·布罗姆黑德爵士（Sir Edward Bromhead），他曾在剑桥大学学习数学并促成了剑桥本科生的分析学会成立。自从认识了布尔之后，这位热心的数学爵士就介绍并借给了布尔一些法国著名数学家的著作。林肯镇 Staint Swithin 教堂的迪克森（George S. Dickson）牧师也送给了布尔一本由法国学院数学主席西尔维斯特·拉克鲁瓦（Sylvestre F. Lacroix）写的微积分教科书（*Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, 1797）。这个时候，他自学的法语派上了用场。几年间，布尔广泛涉猎了牛顿、拉格朗日、拉普拉斯、泊松等数学家的论文和著作，做了大量的读书笔记，并写下了一篇题为“关于变分法的某些定理”（On certain theorems in the calculus of variations）的数学研究草稿。

1839年，24岁的布尔在《剑桥数学杂志》发表了生平第一篇数学论文“解析变换理论研究”（*Researches in the theory of analytical transformations*）。该论文颇得杂志首任主编邓肯·格雷戈里（Duncan F. Gregory）赏识，两人从此结为挚友。之后，布尔先后在该杂志及其系列《剑桥-都柏林数学杂志》上发

¹ 牛顿也出生在林肯郡，与布尔的故乡近在咫尺。

表了 22 篇论文。其中，布尔 1841 年发表的论文 *Exposition of a general theory of linear transformations* 被爱尔兰数学家乔治·萨尔蒙 (George Salmo) 认为是关于多项式代数与几何变换之不变理论的奠基之作，其理论在后来的半个世纪里由乔治·凯莱 (Arthur Cayley) 和詹姆士·西尔维斯特 (James J. Sylvester) 等一批数学家加以完备和发展。

1844 年，布尔凭发表在《伦敦皇家学会学刊》的优秀论文“关于分析的一般方法” (*On a general method in analysis*) 荣获英国皇家学会数学金质奖章。该论文提出了符号逻辑概念，发展了满足微分算子的形式代数规则并将之应用于微分方程求解以及级数求和的解析表达。皇家学会的颁奖词中说：“他的方法可以在科学领域中找到永久立足之地。”² 这篇得奖文章送审时有一位审稿人明确主张退稿，而另一位审稿人是爱丁堡大学的数学教授菲利普·凯兰 (Philip Kelland)。他慧眼识珠，提交了如下的评语：“我很荣幸皇家学会把这篇论文推荐给我审阅，我也很幸运地立即意识到它的重要性。我建议学会给予它一个认可的记录。”

1847 年，布尔出版了他第一本 86 页的小书《逻辑的数学分析》 (*The Mathematical Analysis of Logic*)，建立了逻辑和代数的联系，并由此引进了符号逻辑代数。在引言中他写道：“我的目的是建立一种逻辑微积分，并且我可以宣称，它在公认的数学分析形式中占有一席之地，尽管它目前作为对象和工具都仍然是孤独的。”

在 1846 年，英国物理学家开尔文 (Lord Kelvin William Thomson) 向爱尔兰皇后大学科克分校 (Ireland Queen's University Cork) 推荐了布尔，这一提名还获得了德·摩根 (Augustus De Morgan)、查尔斯·格雷夫斯 (Charles Graves) 以及前面提到的亚瑟·凯莱和菲利普·凯兰等几位大数学家的鼎力支持。经过历时三年的遴选，1849 年，没有学历的 34 岁的布尔最终获得了皇后学院的聘书，成为该校第一位数学教授。当年，数理逻辑学家德·摩根的评语写道：“我可以自信地说，他不仅精通最高水平的数学，而且具有扩展它们的内在力量，这使得非常受人尊敬的他在今天英国创新者中名列前茅。”数学教授菲利普·凯兰在推荐信中写道：“从他观念的独创性和知识的广度及准确性来说，我认为在欧洲很少有人能超越他……”。

布尔到皇后学院任教后，进一步整理了他关于逻辑和代数的分析工作。为了确保自己的数学理论能反映人的心理活动规律，他花了大量时间去阅读心理学文献，去熟悉哲学家们对逻辑思维的认知和评论。布尔希望他的新代数能够包含亚里士多德对人类推理的见解以及斯多葛哲学派 (Stoicism) 的命题演算，并试图遵循德国哲学和数学家莱布尼茨的思想将逻辑化为方程式去求解。布尔强调数学的本质不在于探究数学对象的内容，而在于研究其形式，并且他坚信数学可以用符号来表示。

1851 年，布尔被皇后学院任命为科学院长 (Dean of Science)。

² His method would find a permanent place in the science.

1854年，布尔自行集资出版了另一本名著《思维规律的研究——逻辑与概率的数学理论基础》（*An Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*）。他在序言中写道：“本书要论述的，是探索心智推理的基本规律，用微积分的符号语言来表达，并在此基础上建立逻辑及其构建方法的科学……”。该书进一步完善了第一本书的逻辑代数理论和方法，构建了一个完整的关于0和1的代数系统，并通过用基本逻辑的符号系统来描述多种数学和物理概念。书中，布尔试图解释他企图建立一个新的符号代数和逻辑系统的动机：“尽管不可能建立解决概率论问题的一种普适方法，让它不仅明确接纳科学的特殊数学基础而且接纳作为所有推理基础的普遍思维规律，但不管它们的本质是什么，至少能够让它们的形式是数学的。”事实上，在这本书里，布尔首次引入了逻辑推断的符号表达方法，尽管其原理后来引起过一些争议。

在这两部开山之作中，布尔实质上开辟了一个全新的数学分支，即包括“布尔代数”和“布尔逻辑”的现代数理逻辑学。

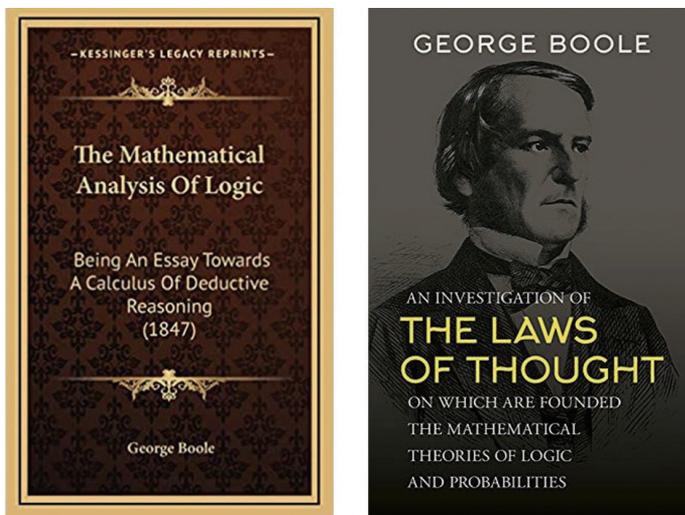


图 1. 布尔的两本逻辑代数学名著

布尔和英国著名数学家查尔斯·巴贝奇（Charles Babbage）有过交往。巴贝奇曾在剑桥大学担任卢卡斯数学讲座教授，也就是牛顿曾担任过的教席。巴贝奇还是个发明家、机械工程师和经济学家，他提出了差分机与分析机的设计概念，被视为是计算机科学先驱之一。可是，布尔和巴贝奇的交互时间太短，两人的思想碰撞没有擦出火花，错失了将二进制布尔代数和布尔逻辑的运算结合起来并加以机械化的机会。布尔代数和布尔逻辑后来得到了美国通才科学家、逻辑学家查尔斯·皮尔士（Charles S. Peirce）的赏识，并为之设计了开关逻辑电路。技术发展的历史不断延续，这项具有巨大潜力的数字技术的最终成就归功于美国数学家克劳德·香农（Claude Shannon），他关于数字通讯方法的成功设计使布尔的全部思想得以实现，成为了后来数字电路设计的实践基础，也是今天数字信息理论的技术基础。

今天的数理逻辑和计算机语言（例如 Wolfram 语言）中用到很多布尔代数

计算，其中的逻辑运算称为“布尔运算”，使用的函数称为“布尔函数”，执行的电路称为“布尔电路”，其结果称为“布尔值”，等等。事实上，同其他名字相比，布尔的名字用于系统功能的次数最多。让“布尔”这个名字流传最广的还有“布尔变量”，因为几乎所有的编程语言都有布尔类型（Boolean）运算。

1850年代后期，布尔的数学研究逐步转向了比较传统的微分和积分方程理论。布尔撰写了两本数学教科书：《微分方程讲义》（*Treatise on Differential Equations*, 1859）和《有限差分计算讲义》（*Treatise on the Calculus of Finite Differences*, 1860），其中他引进了自己的算符演算方法。这两本书在英国一直被用作大学教材，直到19世纪末为止。

布尔一生发表了50多篇科学论文，他荣获爱尔兰都柏林大学和英国牛津大学荣誉学位，1857年被选为英国皇家学会院士，1858年被选为剑桥哲学学会荣誉会士。他被认为是19世纪最重要的数学家之一。

布尔在爱尔兰皇后学院任教直至1864年。一天，他从家里步行去学校上课，路上不期淋了一场暴雨，结果着凉病倒了。他因此犯了急性肺炎，接着又因妻子治疗处理不当，于12月8日不幸病逝，时年49岁。他的遗体下葬在科克市的爱尔兰教堂圣迈克坟场。

爱尔兰皇后学院于1908年改名为科克大学（University College Cork）。为纪念布尔，该大学建立了一个“布尔信息研究中心”。



图2. 布尔纪念头像（科克大学，爱尔兰）

3 布尔家庭和家族

认识布尔的人都说他为人严谨认真、办事很有条理。他是个优秀教师、出色的演说家和高效的管理人，但板书却以潦草出名。他社交广泛，宽厚待人，平时不屑争辩，但又极具正义感，在捍卫个人尊严时绝不含糊退让。

布尔把他所有的时间和精力都放在事业上，工作非常努力，经常熬夜，以至人们不时会看到他若有所思、精神恍惚的样子。他到1855年40岁时才结婚，妻子埃佛勒斯（Mary Everes）是同校一位希腊文教授的侄女，也是个自学成

才的数学爱好者，特别喜欢代数。她曾经说过：“除了祂创造的代数，我对上帝一无所知，但这已经是让我全心全意地爱祂的充足理由。”她是个业余数学科普作家，出版过《代数之哲学与乐趣》(*Philosophy and Fun of Algebra*)和《把孩子带进科学》(*The Preparation of the Child for Science*)等书籍。布尔夫妇育有五个女儿，玛丽·爱伦(Mary Ellen)、玛格丽特(Margaret)、艾丽西亚(Alicia)、露西(Lucy)和艾捷尔(Ethel)。

这五朵金花，流光溢彩、丰泽葳蕤。

大女儿玛丽·爱伦嫁给了数学家和作家查理斯·辛顿(Charles Howard Hinton)，他的数学研究导致了对四维超正方体(tesseract，他起的名字)的研究，并留下了畅销科普作品《第四维》(*The Fourth Dimension*)。辛顿是因为重婚罪被遣离英国的，到了美国先在普林斯顿当讲师，但没被续约，便转到明尼苏达州立大学当助理教授，后来在华盛顿海军天文台担任国家专利局的化学专利审查员。1907年4月30日，他意外死于脑溢血，时年54岁。次年5月，妻子玛丽·爱伦在华盛顿自杀(原因不详)，享年52岁。

查理斯·辛顿和玛丽·爱伦有四个儿子。小儿子塞巴斯蒂安(Sebastian Hinton)有三个子女，其中一个名叫威廉(William H. Hinton)，就是大众熟知的“中国人民的好朋友”韩丁，他1948年创作的关于中国土地改革的长篇纪实文学作品《翻身——中国一个村庄的革命纪实》广为人知。韩丁的妹妹叫寒春(Joan Hinton)，是参加过曼哈顿计划屈指可数的女物理学家之一，晚年定居中国。她的丈夫是另一位“中国人民的好朋友”、美国养牛专家阳早(Erwin Engst)。寒春2010年在北京去世，温家宝总理为之特别发了唁电。

查理斯·辛顿和玛丽·爱伦的长子乔治(George Hinton)是个采矿工程师。乔治的儿子霍华德(Howard E. Hinton)是著名昆虫学家，1961年当选为英国皇家学会院士。霍华德的儿子杰佛瑞·辛顿(Geoffrey E. Hinton)是今天人工智能科技领域的翘楚。他在英国出生，1978年在爱丁堡大学获得人工智能博士学位，后来在加拿大多伦多大学任职计算机科学教授。他1998年当选为英国皇家学会院士，以其在神经网络反向传播算法和对比散度算法的发明闻名于世，被誉为“深度学习之父”，2018年荣获图灵奖。

再回来说说布尔的其他四个女儿。

布尔的二女儿玛格丽特嫁给了艺术家爱德华·泰勒(Edward I. Taylor)。他们的儿子杰弗里(Geoffrey I. Taylor)是著名物理学家和数学家，在流体力学和固体材料研究方面有重要贡献，先后获得重磅的皇家奖章(Royal Medal)、科普利(Copley)奖章、功绩勋章(Order of Merit)、德·摩根(De Morgen)奖章、铁木辛柯(Timoshenko)奖、富兰克林(Franklin)奖章和冯·卡门(von Karman)土木奖，是英国皇家学会院士。他二战时作为十位“VIP List”之一的核心成员参加曼哈顿计划。

布尔的三女儿艾丽西亚继承了父亲的数学天赋，尽管从未有过学术职位，由于受大姐夫的影响，她对四维几何深感兴趣并独立钻研，在该领域有不少成果。她发现了高维空间特别是四维空间中多种凸面实体的数量和形式，还给它

们起了一个名字“多面体”(Polytope)。1914年,荷兰格罗宁根大学授予她荣誉博士学位以表彰她对四维几何的突出贡献。

布尔的四女儿露西是爱尔兰化学家和药剂师,曾在伦敦皇家自由医院任职化学教授,是英国史上第一位研究药学的女性和第一位女化学教授,也是英国化学学会的第一位女会士。

布尔的小女儿艾捷尔25岁时到俄国一个旧贵族家庭当音乐教师,期间接触到俄国革命思潮。返回伦敦后,她曾与恩格斯和俄国革命家普列汉诺夫结识,后来与从西伯利亚逃亡到英国的波兰革命家伏尼契(Wilfrid M. Voynich)结婚。她酷爱写作,以实名“艾捷尔·伏尼契”在伦敦出版了文学名著《牛虻》(*Gadfly*, 1897),该书后来在苏联和中国产生过巨大的影响。1920年代,夫妇俩移居到了纽约,丈夫成为古董书商,她自己则靠改编音乐、辅导音乐和翻译作品维生。艾捷尔在纽约安静地度过了后半生,96岁辞世。后人按遗嘱将她的骨灰撒布在曼哈顿的中央公园里。

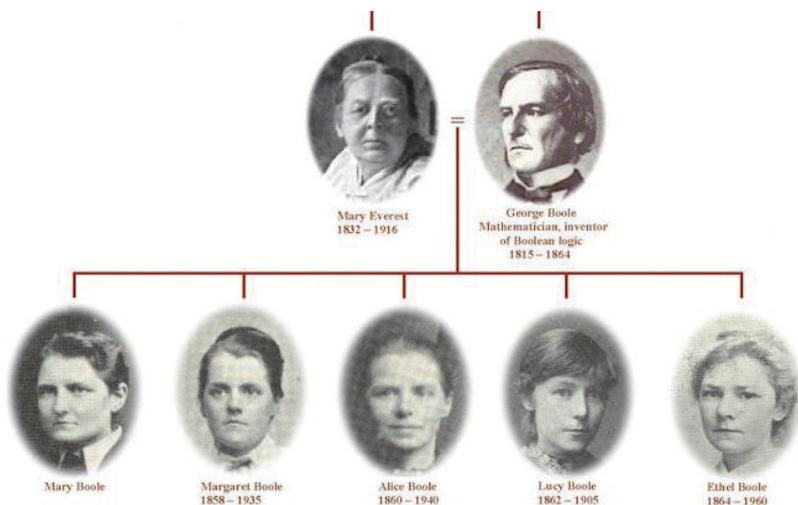


图3. 布尔一家

4 布尔与诗歌

历史上不少数学家都喜欢写诗,有些甚至被誉为诗人。和布尔同时代的就有知名数学家威廉·哈密尔顿(William R. Hamilton),他一生写了124首诗歌,虽然没有正式出版却在学界四处流传。

布尔也不例外。除了阅读并学习亚里士多德的形而上学、西塞罗(Marcus Tullius Cicero)的哲学、斯宾诺莎(Baruch Spinoza)的伦理学,布尔还经常品读古典诗歌、原创十四行诗和其它体裁的作品。据布尔自己说,他最欣赏的诗人是但丁(Dante Alighieri),而且他特别喜欢但丁《神曲》三篇中的《地狱篇》和《天堂篇》。

布尔14岁时在林肯镇发表了第一首从希腊语翻译为英语的诗 To The Evening Star。但这首译作引来了当地一位古典诗人的公开质疑,说他不相信一个14岁的少年没有人辅助可以翻译出这么高水平的诗歌。该指责最后被证明无效,却让当

地居民知道了他们当中有一位天才少年。

小布尔翻译了几首希腊诗歌之后，又开始翻译拉丁文诗歌，其中被认为最好的一首是罗马诗人贺拉斯·弗拉库斯(Quintus H. Flaccus)的 *Non Omnis Moriar*³。

接下来，布尔开始自己写诗了。在1832–1855年间，他写了许多十四行诗，其中23首保存了下来。特别有趣的是他在1845年5月写的那首“献给数字三的十四行诗”(Sonnet to the Number Three)，诗中他暗喻宇宙是“三合一”的，即是三维的。这也让我们想起了《道德经》里的“三生万物”。后来哈密尔顿说，应该还有“时间”这一维。为此，布尔在1848年专门写了一篇关于“四元数”(quaternion)的论文。

布尔很多诗歌是写给自己家人和亲友的，也有写给一些科学家和数学家朋友。他写得更多的是宗教赞美诗和历史题材诗。他有时候也写自己的情感和孤独。1855年结婚后，妻子劝他把时间和精力留给科学研究会更好，他从此就再也没有写过诗歌了。

人们注意到，或许是由他的谦虚内向性格所决定，布尔留下的诗歌里没有一首是描述自己的科学发现和学术名声的。这和威廉·哈密尔顿写诗自诩的风格迥然不同。

布尔的诗收集在爱尔兰科克大学荣休数学教授麦克海尔(Desmond MacHale)于2020年出版的《乔治·布尔的诗歌》(*The Poetry of George Boole*)一书中。

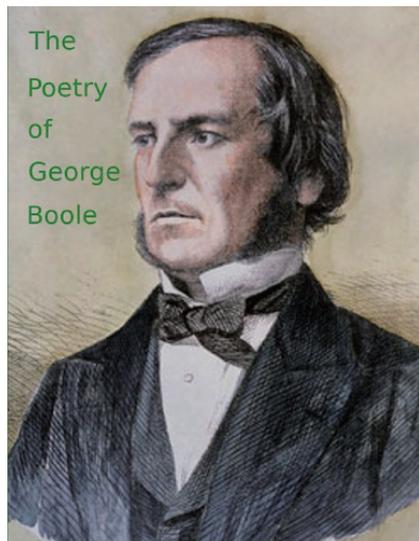


图4.《乔治·布尔的诗歌》封面



作者简介：

陈关荣，香港城市大学
电机工程系讲座教授，
欧洲科学院院士和发
展中国家科学院院士。



图5.笔者2005年访问科克大学

³ 英文名 I Shall Not Wholly Die.