

## 狄拉克和他的 $\delta$ 函数

陈关荣

如果让我选一个“最优美的函数”的话，我会选“狄拉克 $\delta$ 函数”。



狄拉克 $\delta$ 函数为数学、物理及工程技术人员所熟悉；它由英国科学家保罗·狄拉克引进，因而得名。



保罗·狄拉克 (Paul A M Dirac)

保罗·狄拉克 (Paul Adrien Maurice Dirac) 1902年8月8日出生于英国的 Bristol, 就读于 Bishop 街小学, 在和 Bristol 大学合办的 Merchant Venturers 男子技术学校 (现已不存在) 读完中学, 之后在 Bristol 大学工学院电子工程及应用数学专业以优异成绩毕业, 最后于 1926 年在剑桥大学 St John's College 取得物理博士学位。

有两件事足以表明狄拉克在学术界的地位：英国剑桥大学有一个灿耀得无以伦比的卢卡斯数学荣誉讲座教授职位 (Lucasian Chair of Mathematics), 于 1663 年根据当时著名的大学议会议员 Henry Lucas 的捐款和遗愿而设立。曾荣登此宝座的有大名鼎鼎的牛顿 (Sir Isaac Newton) 和霍金 (Stephen Hawking)。1932 年, 30 岁的狄拉克便荣膺这个桂冠。翌年, 狄拉克和薛定谔 (Erwin Schrödinger) 一起分享了当年的诺贝尔物理奖。

我通常认为狄拉克是一个“工程物理数学家”。在向大家作更详尽的解释之前, 先让我们一起来简要地回顾他的 $\delta$ 函数的背景和简史。

对于工程技术人员、物理学和应用科学家们来说, 下面这两个式子算是定义了 $\delta$ 函数:

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \in R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

这两个式子一目了然，而且功能巨大：对实轴  $R$  上的任何连续函数  $f(x)$  和任何实数  $r$  都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-r)dx = f(r)$$

这实在太好用了，不是吗？

数学家对此不以为然，因为它不是一个常义下的标准实值函数。它只是一种广义函数，因而需要把它的定义严格化。现在知道，可以把  $\delta$  函数严格地定义为一种测度：对定义在实轴上任意连续函数  $f(\cdot)$ ，可以令  $\delta$  为满足 Lebesgue–Stieltjes 积分  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\{dx\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\{H(x)\}$  的一种测度，其中  $H(x)$  是 Heaviside 阶梯函数。也可以把  $\delta$  函数严格地定义为一种 Sobolev-Schwartz 分布：考虑一个包含所有某类足够光滑的、在实轴上具有紧支集  $\Omega$  的函数  $\phi$ （称为试验函数）的空间  $S$ 。此空间中每一个有定义连续线性泛函都称为是一个分布。引进一个线性泛函，记为  $\delta[\cdot]$ ，满足  $\delta[\phi] = \phi(0)$ ， $\forall \phi \in S$ ，以及  $|\delta[\phi]| \leq \sup_{x \in \Omega} |\phi(x)| < \infty$ 。称这个定义在空间  $S$  中具有紧支集  $\Omega = \{0\}$  的线性泛函为狄拉克  $\delta$  函数。

在这里让我们更感兴趣的，是  $\delta$  函数出现的历史契机。

几乎所有的科学发现和技术发明都有历史可循，基本相同或相似的思想火花在漫长的过去时常已有浮现甚至多次闪烁。回顾一下历史，数学家和物理学家共同探讨数学问题的现象在十九世纪初就已经很普遍，那时许多科学家同时是数学家和物理学家。 $\delta$  函数的基本思想可以追溯到泊松（Siméon Poisson）在 1815 年关于复平面上线积分的研究以及傅立叶（Jean-Baptiste Fourier）在 1822 年关于热的解析理论一书。特别是柯西（Augustin-Louis Cauchy）在 1815 年写成、1827 年发表的一篇关于无穷小分析的论文里，实际上已经使用了无限高和无限窄的单位脉冲来做积分核，因此后人称之为柯西  $\delta$  函数，或柯西-狄拉克  $\delta$  函数。后来，克希荷夫（Gustav Kirchhoff）在 1882 年关于积分方程的研究和海威赛（Oliver Heaviside）在 1883 年关于奇异函数的求导中，都间接隐晦地使用了实质上的  $\delta$  函数。

我们今天使用的  $\delta$  函数的简单明确表述形式归功于狄拉克。狄拉克需要  $\delta$  函数的主要动因来自他对量子力学的研究。也许是基于下面马上就要来介绍的狄拉克关于  $\delta$  函数的自然又合理的引进方式，后人都把它称为“狄拉克  $\delta$  函数”。

早在十九世纪，克罗内克（Leopold Kronecker）就引进了离散  $\delta$  函数

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

其中  $i$  和  $j$  为任意整数。狄拉克  $\delta$  函数是对它的一种自然却又艰难的推广。我们不妨猜测，狄拉克当时考虑一个粒子  $a$  的量子态，并创造性地用符号  $|a\rangle$  来标记（现称为狄拉克符号）。首先，狄拉克把它在一个有限维完备内积空间中作展开：

$$|a\rangle = a_1|x_1\rangle + a_2|x_2\rangle + \cdots + a_n|x_n\rangle$$

其中  $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^n$  为正交基底，满足  $\langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij}$ ， $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。于是，从基底态  $|x_i\rangle$  去计算量子态  $|a\rangle$  的概率为  $p_i = \langle x_i | a \rangle = a_i$ ，从而

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i | a \rangle |x_i\rangle$$

然后，狄拉克要把上式推广到无穷维的量子态空间去，以便描述粒子  $a$  的完全状态：

$$|a\rangle = a_1|x_1\rangle + a_2|x_2\rangle + \cdots + a_n|x_n\rangle + \cdots$$

因为粒子  $a$  的量子态是连续而不是离散的，从而需要把这个无穷级数换成积分：

$$|a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) |x\rangle dx$$

其中  $f(x)$  是在位置  $x$  上粒子出现的概率，满足

$$f(x') = \langle x' | a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \langle x' | x \rangle dx$$

这个关系式对所有的量子态  $|a\rangle$  成立，因而对所有的  $f(x)$  也成立。剩下的问题是如何去找“函数”  $\langle x' | x \rangle$  使得上述积分成立。为简单起见，考虑位置  $x'=0$  并记  $g(x) = \langle 0 | x \rangle$ 。于是上式变成

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx$$

啊哈，这个“函数”  $g(x)$ ，不就是狄拉克想要的“ $\delta$  函数”吗？！

$\delta$  函数是狄拉克留给后人的一个可喜可贺的数学贡献。更重要的是，狄拉克的名字和二十世纪最重要的科学成果之一的“量子力学”密不可分。

1928 年狄拉克 26 岁，提出了一个符合相对论的关于电子的方程式，即后来著名的狄拉克方程，这里简写为：

$$(i^{-1}\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$$

其中  $m$  为质量， $\gamma^\mu$  是狄拉克引进的特殊矩阵（现称为狄拉克矩阵）， $\psi$  是狄拉克引进的一个用于描述自旋  $-1/2$  基本粒子场（现称为狄拉克场）。这方程式被后人称为是世界上和最历史上最漂亮的几个方程式之一，它能非常成功地推导出所有已知的关于电子的属性。但是，这个方程式隐含着一个致命的问题，就是它有具有负能量的量子态的解，而这一点是违背当时物理学基本理论的。可是，把这种解丢掉的话又会引来一些数学的内在矛盾。怎么办呢？

狄拉克在冥思苦想了两年之后，在 1930 年提出了一个非常大胆的猜想：具有负能量的量子态是存在的，只是我们还没有观测到！他的论据是，这种量子态通常被电子占据了，而电子又遵循不兼容原理，所以其它电子无法进驻这些带负能量的量子态，致使这些负能量态好像不起任何作用；但是，一旦某个负能量态空了出来，它的行为就会像一个带正电的粒子一样。

狄拉克认为这个“空穴”应该是一种新粒子，并称之为正电子。他还指出，真空中充满了无限多这种具有负能量的粒子态，后人称之为“狄拉克海”。

时间很快又过去了两年。1932年，卡尔·安德森（Carl Anderson）在宇宙线中发现了正电子，证实了狄拉克的预言真的是“空穴来风”！当时的新闻震惊了整个科技界。狄拉克因此和薛定谔一起分享了1933年的诺贝尔物理奖——那时狄拉克才31岁，在他剑桥大学博士论文《量子力学》答辩七年之后。这期间，狄拉克还发展了费米-狄拉克（Fermi-Dirac）统计原理并开创了量子电动力学。顺便提及，到1936年，卡尔·安德森也获得了诺贝尔物理奖。

狄拉克对正电子的正确预测是近代理论物理最伟大辉煌的成就之一。现在我们知道，不仅负电子有其相反的正电子，所有粒子都有其反粒子——反质子和反中子于1955-56年相继在美国加州 Lawrence Berkeley 国家实验室中被发现，反氢原子则于1995年在欧洲核研究中心 CERN 被成功制造出来——反粒子的存在性证明是量子力学与相对论相结合之后的必然结果。

前面说过，几乎所有的科学发现和技术发明都有历史可循。历史纪录表明，在德国出生的英国物理学家舒斯特（Sir Franz Schuster）早在1898年就曾两次写信给《自然》杂志，推测反原子和太阳系中反物质的存在。狄拉克则给出了科学理论根据。今天科学家们虽然相信反粒子可以进一步构成各种物质的反物质，但同时也知道反物质与物质并不对称地存在，它们在太阳系中微乎其微并且与物质相互湮灭，因而不会对人类带来特别的好处或者伤害——至少目前来看是这样。



1927年第五次 Solvay 会议参与者（摄于比利时 Solvay 国际物理研究所）；这是一幅被称为“世界上最具睿智的大脑群集”的世纪照片，包括爱因斯坦和居里夫人等；狄拉克站在全幅照片的正中央

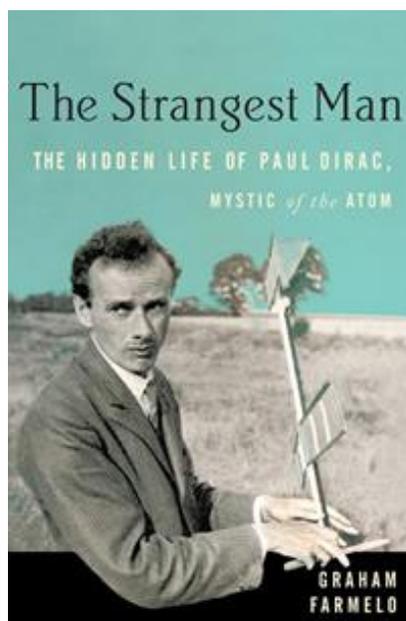
狄拉克极具天才物理学家的直觉。1931年，他在对电磁场理论做了深入研究后得出一个令人惊奇的结论：电场和磁场应当对称。他认为如果存在只有一个极而不是同时具有南北两极的

磁粒子（称为磁单极子）的话，电和磁现象就具有美好的完全对称性。狄拉克预测了磁单极子的存在。它不仅使 Maxwell 方程具有了完全对称的形式，而且可以解释电荷的量子化现象，条件是任何带电粒子的电荷必须是单位电荷的整数倍以及任何带磁粒子（磁单极子）的磁荷必须是单位磁荷的整数倍。这一结论揭示了电荷和磁荷的不连续性，解释了悬而未决的“电荷量子化”难题。可是，多年来科学家们通过种种方式寻找磁单极子，均一无所获，直到1994年美国物理学家塞伯格（Nathan Seiberg）和威滕（Edward Witten）才从理论上证明磁单极子可以存在。不过，功夫不负有心人，2013年德国 Helmholtz-Gemeinschaft 国家研究中心联合会的研究人员莫里斯（Jonathan Morris）在其他大学同事的协作下，首次观测到了磁单极子在一种实际材料中出现的过程，从而证实了它的存在。他们的研究报告于当年9月3日发表在《科学》杂志上。



自古名人多逸事，狄拉克也不例外。

狄拉克一生多思寡言，总是被同事称为怪诞之人。当年剑桥大学的同事们在描述狄拉克时有一个善意的玩笑，把“一小时说一个字”定义为1个“狄拉克单位”，足见他平日言辞之少。伦敦博物馆资深研究员 Graham Farmelo 在他2009年的一本传记文学作品《The Strangest Man: The Hidden Life of Paul Dirac, Mystic of the Atom》里收集了不少关于狄拉克的轶事趣闻。



G Farmelo 写的传记文学作品（2009年出版）

狄拉克一生对文学艺术没有兴趣，他只追求物理与数学之美。美国犹太人物理学家、曼哈顿计划主要领导者之一的罗伯特·奥本海默（Julius Robert Oppenheimer）喜欢文学和诗。狄拉克有一次见到他说：「听说你在写诗。我不明白一个工作在物理学前沿的人怎么能够同时又去写诗。这两者是不相容的。科学是把以前没有人了解的事情用大家都能明白的话来说清楚，诗却是将大家都已经知道的东西以无人能够理解的方式表述出来。」

有一次，狄拉克与波尔（Niels Bohr）一起参观哥本哈根的国家艺术博物馆。当他们来到一幅印象派油画面前时，波尔颇为欣赏，但狄拉克却惊奇地指着画面说：「咦，这条船还没有画完嘛！」

又有一次，狄拉克和海森堡（Werner Heisenberg）一同到日本讲学。海森堡向来社交活跃，在一次晚会上与年轻姑娘们翩翩起舞。狄拉克问他为什么这样兴高采烈？海森堡笑了，说和好姑娘们跳舞是一种享受。狄拉克想了一会，依然不解：「您怎么知道她们是好姑娘？」

还有一次，狄拉克在美国威斯康辛大学作报告。报告中他不时停下来，问问大家有什么问题没有？期间，有一位听众说：「您写在黑板右上方的那个方程我看不懂。」狄拉克听后一言不发，让当时的场面相当尴尬。几分钟过去了，主持人试图打破僵局，说狄拉克教授您就回答一下刚才那个问题吧。狄拉克喃喃地回应道：「刚才那个不是问题，好像是一个说明。」

前面提到，1933年狄拉克与薛定谔共享诺贝尔物理奖。当时他私下对学术老前辈卢瑟福（Ernest Rutherford，1908年诺贝尔化学奖得主）说，他不想成为新闻人物，打算拒绝接受这个荣誉。卢瑟福对他说：「如果你这样做，你会更出名，人家更要来麻烦你了。」于是狄拉克才同意去领奖。另一个例子说，英国皇室曾经册封狄拉克为骑士，那是英国皇家授予最高级别的荣誉，可是狄拉克却拒绝了，只因为他不想对自己名字加上一个前冠。难怪波尔后来评论说：「物理学家中，狄拉克具有最纯洁的灵魂。」

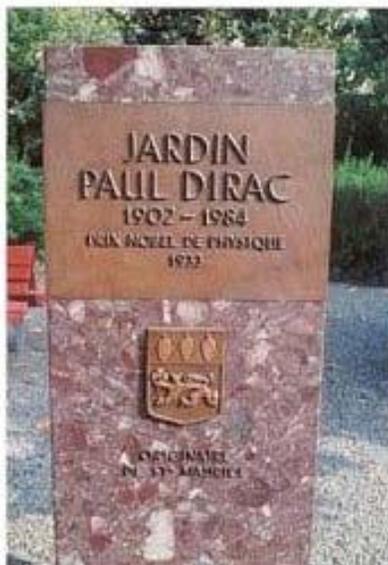
### 三

时间飞越到了1970年。为了与嫁到美国佛罗里达州州府 Tallahassee 的女儿 Mary Elizabeth 住得近一点，68岁的狄拉克以剑桥大学荣誉教授的身份全职加盟佛罗里达州立大学。他在那里平静地度过了辉煌一生最后的十四年，于1984年10月20日辞世，被安葬在该地的 Roselawn 坟场。2002年7月9日，他的夫人 Margit Wigner Dirac 逝世，合葬一处。他们的另一个女儿 Florence Monica 则安家在加州 La Jolla，在那里渡过余生。



狄拉克夫妇在 Roselawn 坟场的石碑

保罗·狄拉克的父亲查理斯·狄拉克 (Charles A L Dirac) 出生在瑞士的 Saint-Maurice, 后来移民到英国。保罗去世后, 乡亲们为他在家乡 Saint-Maurice 的父亲墓旁修建了一个小小纪念碑。此外, 位于英国伦敦的威斯敏斯特教堂 (Westminster Abbey), 俗称西敏寺, 是英国国王登基和皇室举行婚礼的地方; 如果死后能在此地放一墓碑, 则是至高无上的荣耀。这里长眠着许多伟大人物, 如牛顿 (Sir Isaac Newton)、达尔文 (Charles Darwin)、狄更斯 (Charles Dickens)、邱吉尔 (Sir Winston Churchill)、弥尔顿 (Horatio Nelson)。牛顿墓旁放置有一块小小石碑, 上面镌刻着保罗·狄拉克的名字以及他那优美的方程式。



Saint-Maurice, Switzerland



Westminster Abbey, London, UK

## 四

2013 年我在 Bristol 大学的工学院学术访问三个月, 在 Bristol 度过了整个夏天。趁此之便, 走访了狄拉克的故居和小学, 更在狄拉克曾经读书的地方工作多时、浏览多遍。

狄拉克的故居已经为他人私有, 仅在大门边墙上挂着蓝色白字的匾额一块, 写着: 「保罗·狄拉克; 1902 - 1984; 1933 年诺贝尔奖获得者, 他阐明了量子物理和反物质的奥秘; 他出生在这所房子里并居住于此至 1913 年」。

狄拉克就读过的 Bishop 街小学和 Bristol 大学及其工学院内外, 则完全找不到狄拉克的任何痕迹: 没有匾额、没有图片、没有说明。

惊诧或者说失望之余, 我与几位狄拉克故居及小学邻居、教师, 特别是 Bristol 大学工学院的资深教授作过闲聊, 问他们为何不把狄拉克故居变为博物馆? 为何不在小学围墙外贴上狄拉克的巨幅画像? 为何不在工学院内设置狄拉克展览厅?

呵呵，我自认为问得在理，没想到所得回应大同小异、平淡无奇：

「全世界都知道我们的狄拉克，用不着去刻意渲染。」

「谁不知道狄拉克的话是他的无知，不是我们的过错。」

言语之间，流露出莫大的民族自信。



狄拉克故居, Bristol, UK



Bishop 街小学, Bristol, UK

## 五

最后回顾一下，我前面把狄拉克称为是“工程物理数学家”。事实上，我并不是唯一这样来理解他的人。上面提到 Graham Farmelo 2009 年的传记中说：「狄拉克常常具有令人费解的惊人思路的根本原因之一在于他是一个异同寻常的“混血儿”——他身上有一部分是理论物理学家，有一部分是纯粹数学家，还有一部分是工程师。」狄拉克的  $\delta$  函数正好就是这种三位一体的科学技术理论的完美产物。

狄拉克常常以直接了当的方式进行数学推理，每一步的推理都受物理直觉的引导，有时还抗拒数学的严密性——如果这种严密性妨碍他思考的话。他对  $\delta$  函数的定义和使用就是一个例证。数学家伯克霍夫（Garrett Birkhoff）曾经在写给物理学家肯布尔（Edwin Kemble）的信中说，他在剑桥大学听狄拉克讲授量子力学课程时，「出乎意料的是，我发现狄拉克表述物理系统的方法只是为了形式上的方便，它不具体表达那些人们尚不完全熟悉的数学原理。……狄拉克允许自己享有太多数学上的自由。」肯布尔回信表示同意，并写道：「就不合理的推理而言，我已听说有人列出过他四十至五十个错误。可是，他的最终结果总与实验一致。对我来说，他十分神秘。」

狄拉克对数学严密性的宽松态度也许滋生于他早期接受的工程教育。然而狄拉克非常感激自己在工程学院里获得的训练。他说：「如果没有这些来自工程学的训练，我或许无法在后来的研究做出任何成果。……那些要求所有计算推导上完全精确的数学家们很难在物理学上走得很远。」

物理学家们喜欢狄拉克自然不必说了，他的物理直觉居然预言并论证了不可思议的反物质的存在。工程技术人员则喜欢他的简明直接的推理逻辑，特别是他对  $\delta$  函数的直观表达。数学家们其实也很喜欢他，为补证他的  $\delta$  函数而发展了分布理论不说，今天许多人依然沉迷于研究狄拉克流形（Dirac manifold）。这当然也可以从狄拉克本人的自述反过来品味：「我的工作中有很多时候只是在玩方程式，看看可以得到什么结果。」这不是一句典型的数学家的话吗？狄拉克也说：「一个数学理论如果是真正漂亮的话，它一定会显示为一种优雅而重要的物理现象。」1956 年他访问莫斯科大学时，曾在黑板上写道：「物理学定律必需具有数学的美」。

狄拉克是无神论者，不过他在 1963 年发表在《科学的美国人》杂志中的一篇论文里写道：「上帝是一位高明的数学家，祂用高深的数学来构建宇宙。」



**作者简介：**陈关荣，香港城市大学电子工程系讲座教授，欧洲科学院院士