

杜芬及其混沌振子模型

陈关荣

(香港城市大学)

一个早期的典型非线性机械振动和混沌模型是 1918 年建立的杜芬振子方程：

$$\ddot{x}(t) + \delta \dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x^3(t) = \gamma \cos(\omega t)$$

其中， $x(t)$ 是振荡器的位移； α 是线性势能系数，通常为正值，描述线性恢复力； β 是非线性势能系数，可以为正值或负值，描述非线性恢复力； δ 是阻尼系数，描述阻尼力； γ 是外部驱动力幅度； ω 是外部驱动力频率； t 是时间变量。



图 1 格奥尔格·杜芬

德国工程师格奥尔格·杜芬（Georg W. C. C. Duffing, 1861 年–1944 年，图 1）于 1861 年 4 月 11 日出生在德国和瑞士边界的瓦尔茨胡特（Waldshut）镇。父亲 Christian Duffing 是个商人，母亲名为 Julie（昵称 Spies）。他在家中六个小孩里是老大。他一岁时随家人迁居到了曼海姆（Mannheim）。

1878 年，杜芬进入卡尔斯鲁厄理工学院（Polytechnische Schule Karlsruhe）学习工程和数学。期间，他因心脏瓣膜疾病被免除服兵役。后来，他转到卡尔斯鲁厄（Karlsruhe）的弗里德里希亚纳大学（University Fridericiana）学习机械工程。

1983 年大学毕业后，杜芬开始在科隆（Köln）的 Deutzer Motorenwerken 燃气发动机厂工作，参与内燃机研发项目，主要研究曲轴、制动器、齿轮、发动机的振动问题。

1905 年，杜芬和伊丽莎白·洛德（Anna L. F. Elisabeth Lohde，1882 年–1964 年）在柏林结婚，后来两人有四个孩子。

1910 年，杜芬应邀前往美国西屋电气公司（Westinghouse Electric）短期工作，期间学习高压交流输电技术。之后，他返回德国，成为独立咨询和自由研究工作者。

1913 年，杜芬一家迁居柏林。在柏林大学，他旁听了马克斯·普朗克（Max Planck，1858 年–1947 年）教授的量子理论课程，并利用周末到皇家技术学院（Royal Technical Faculty）欧根·迈耶（Eugen E. Meyer，1868 年–1930 年）教授的机械实验室做非线性振动实验。在那里，他搭建了自己的机械振动装置。

1918 年，他出版专著《固有频率可变的受迫振动》（Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz），在书中正式建立了他的振动方程并列出了实验验证记录。

杜芬当年要解决什么问题呢？

经典线性简谐振动理论认为，描绘共振现象的数学曲线是单峰函数，其升降频率都落在同一条曲线上。但杜芬在机械振动实验中发现：共振曲线会弯曲，并且存在振幅跳跃、频率迟滞及两个稳态解的现象：随着激励频率缓慢增加，振幅到达某个点值时会突然下跳；反过来，频率缓慢降低时，振幅会在另一个更低的频率点上突然上跳，而且两条路径并不重合。因此，线性弹簧模型完全无法解释这个现象。于是，他在线性胡克力的基础上增加了一个三次非线性项，从而建立了上面介绍的那个带驱动的非线性微分方程，用来描述大变形下弹簧不再遵守胡克定律的力学行为，并成功地解释了跳跃共振（jump resonance）和迟滞效应现象。

杜芬振子方程的一个显著特征是存在双阱势（double-well potential），即一个拥有两个局部能量最低点且中间由一个能量势垒隔开的势能模型。这导致在相同的参数设置下会出现两个稳态解，并由此产生振荡振幅随驱动强度变化而呈现的迟滞效应。根据驱动强度的增大或减小而进入滞后区域的方式，振子在相同的驱动下会表现出两种不同的振荡振幅。后来，这种双稳态特性在多个实验平台上获得广泛验证。

杜芬的振子方程早期在德语圈内传播，直到 20 世纪 20 年代才开始在英语文献中引用，而“杜芬方程”（Duffing equation）这个称谓到 40 年代才在学术界里确立下来。

当然，杜芬方程不是无源之水、无本之木。远在杜芬之前，莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler，1707 年–1783 年）就建立了第一个受谐波驱动的无阻尼线性振子运动方程，称为欧拉方程： $m\ddot{x} + kx = \gamma \sin(\omega t)$ ，其中 m 是质量， k 是胡克弹簧系数， γ 是外部驱动力幅度， ω 是外部驱动力频率， t 是时间变量。欧拉利用这个方程，首次解释了共振现象。

接下来是百年后的赫尔曼·冯·亥姆霍兹（Hermann von Helmholtz, 1821 年–1894 年）。他建立了亥姆霍兹方程 $m\ddot{x} + k_1x + k_2x^2 = \gamma \sin(\omega t)$ ，其中 k_1 和 k_2 分别为线性力和非线性力的恢复系数。

最后值得提及的是第三代瑞利男爵约翰·斯特拉特（John W. Strutt, Third Baron Rayleigh, 1842 年–1919 年），通常称为瑞利（Rayleigh）。他研究了一种具有对称“力–位移”特性的系统，其运动方程表示为 $m\ddot{x} + k_1x + k_2x^3 = 0$ 。显然，这已经是一个没有谐波驱动的杜芬方程了。

尽管如此，杜芬的贡献十分显著。能在物理学基本原理之上依赖于严格数学理论建立一个有意义的驱动非线性振动方程不是一件轻而易举的事。更重要而且有趣的是，杜芬方程既可以是一个能量保守的哈密顿（Hamiltonian）系统，又可以是一个能量衰减的耗散（Dissipative）系统，两者取决于方程中是否存在阻尼项和驱动项：

（1）无阻尼（ $\delta = 0$ ）和无驱动（ $\gamma = 0$ ）时，它是哈密顿系统：此时存在哈密顿量 $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta x^4$ ，满足 $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$ ， $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ ，其中 $y = \dot{x}$ ，因此是一个二维保守哈密顿系统。

（2）有阻尼（ $\delta > 0$ ）和无驱动（ $\gamma = 0$ ）时，它是耗散系统：这时的哈密顿量 $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{2}\beta x^4$ 满足 $\frac{dH}{dt} = -\delta y^2 \leq 0$ ，其中 $y = \dot{x}$ ，因此系统能量单调减少。

（3）有阻尼（ $\delta > 0$ ）和有周期驱动（ $\gamma > 0$ ）时，它是个耗散非自治系统：有能量耗散并有能量输入，两者之间的协调与竞争导致复杂动力学行为的产生。

当年，杜芬只是研究了周期振动、次谐波共振和跳跃现象。到了 20 世纪 60 年代，美国力学、数学家菲利普·霍姆斯（Philip Holmes, 1945 年–）等学者重新研究了杜芬方程，并借助计算机数值模拟，发现杜芬系统也可以产生混沌吸引子（图 2）。此后，杜芬方程成为混沌理论的经典范例之一。

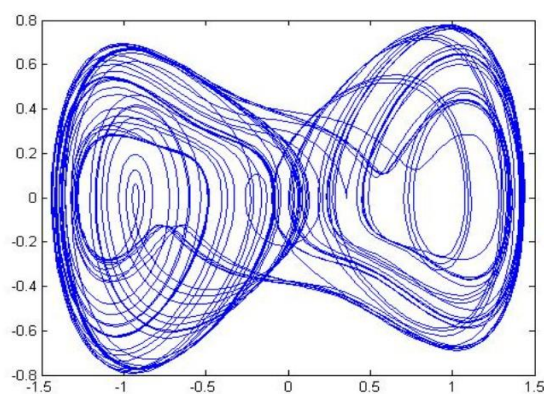


图 2 杜芬方程产生的混沌吸引子
($\alpha = -1, \beta = 1, \delta = 0.2, \gamma = 0.3, \omega = 1$)

杜芬方程描述的是单自由度、带立方非线性刚度的机械振子。但是，人们后来发现它的应用场景极广，包括机械工程中的大挠度梁、板屈曲、船舶横摇、轴承缺陷检测、非线性隔振器；电子工程中的非线性电路、微弱信号检测；声学 and 流体力学中的液体晃荡，以及结构健康监测等。

杜芬振子是“非线性势场动力学”的典型模型，而范德波尔振子是“非线性耗散动力学”的典型模型。前者研究从势能结构到轨道结构再到混沌行为的演化，而后者研究从能量输入输出到极限环产生再到混沌行为的演化。表 1 列出了杜芬振子和范德波尔振子二者的本质差异。

	Duffing	van der Pol
非线性来源	回复力	阻尼
代表方程	$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f(t)$	$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$
势函数	存在	通常不存在
核心现象	多稳态、跳跃、势阱切换	极限环
最著名对象	双势阱振子	自激振子
工程背景	非线性弹簧	真空电子振荡器

表 1 杜芬振子和范德波尔振子的比较

杜芬在燃气发动机、曲轴动力学、制动系统上有多项研究成果。他一生出版了两部专著、合编了一本文集、发表了六篇技术论文。难能可贵的是，他晚年仍然孜孜不倦地从事工程振动研究，直到 1944 年 4 月 5 日去世，享年 83 岁。他的遗体被安葬在柏林 Hallesches Tor 的耶路撒冷公墓。