

霍普夫和他的分岔理论

陈关荣

(香港城市大学)

我目前主编的一份学术期刊名叫“分岔与混沌国际杂志”(International Journal of Bifurcation and Chaos)。今天,大家或多或少都知道“混沌”(chaos),因为它有颇长的历史和许多有趣的故事[1,2]。特别是,大家都知道洛伦茨(Edward Norton Lorenz, 1917-2008),从他那里了解到著名的“蝴蝶效应”[3]。不过,大家也知道“分岔”(bifurcation)吗?也知道分岔理论的奠基人吗?

事实上,分岔理论比混沌理论的历史更长。分岔理论的一个重要人物是艾伯哈德·霍普夫(Eberhard Friedrich Ferdinand Hopf, 1902年4月4日-1983年7月24日)。今天,世界上“分岔与混沌”理论及其应用研究领域的科研人员,大概没有谁不曾在论文中分析或提及过“霍普夫分岔”(Hopf bifurcation)。



图1 艾伯哈德·霍普夫(1902-1983)

【一】生平

霍普夫于1902年出生在奥地利萨尔茨堡,即音乐家莫札特(Wolfgang Amadeus Mozart, 1756-1791)的故乡。霍普夫的父亲弗里德里希(Friedrich Hopf)是一位巧克力糖果制造商。1920年,霍普夫在德国柏林中学毕业后进入图宾根(Tübingen)大学,在那里读了一个学期,然后转到柏林大学,在那里读了七个学期。1925年-1926年间,他

在德国数学家埃哈德·施密特（Erhard Schmidt, 1876-1959）和俄裔德国数学家伊赛·舒尔（Issai Schur, 1875-1941）联合指导下完成了数学博士学位论文。1927 年，他在柏林大学天文研究所任职科研助理。1929 年，霍普夫在柏林大学完成了科学博士学位并获得了数学和天文学的教学资格。同年，他和德国著名音乐家 Johannes Wolf（1869-1947）的女儿伊尔斯·沃尔夫（Ilse Wolf）结婚。2006 年，他们的女儿芭芭拉·霍普夫在写给数学家 Hans-Joachim Girlich（1938-2018）的信中回忆道：“我的父母，尤其是我的母亲，非常热情好客，很多音乐之夜都沉迷在演出中。我的父亲是一位出色的钢琴演奏家，母亲是一位艺术歌曲歌手。”

1929 年，德国的经济形势很差，霍普夫找不到合适的工作职位。不过，他幸运地获得了美国洛克菲勒基金资助，前往哈佛国际天文台当研究员。1930 年，霍普夫来到了波士顿，在爱因斯坦塔楼（Einstein Tower）上班。在那里，他主要在数学家乔治·伯克霍夫（George David Birkhoff, 1884-1944）指导下做研究工作。他研究拓扑学和遍历理论，以及恒星大气流体动力学。1931 年，他在美国国家科学院院刊（PNAS）发表了一篇关于动力系统时间平均定理的论文。该论文被认为是现代遍历理论的创始文献之一。在波士顿，霍普夫认识了麻省理工学院的数学家诺伯特·维纳（Norbert Wiener, 1894-1964）。两人合作研究，对早期辐射传输理论中的米尔恩（Milne）方程给出了求解方法，并于 1931 年发表了一篇论文，发展了著名的维纳-霍普夫方法。其基本思想是通过积分变换将原方程化为一个泛函方程，后人称之为维纳-霍普夫方程，然后再用函数因子分解方法求解。该方法的离散形式本质上就是后来的维纳滤波（Wiener Filter）。

1932 年，霍普夫在哈佛国际天文台研究员基金即将结束时与柏林大学天文研究所联系，希望回去复职。可是，柏林的回信却明确表示，由于各种原因，不能为他提供任何工作。在此困难时刻，维纳帮助他获得了麻省理工学院数学系助理教授的职位。在那里，霍普夫的数学研究主要在遍历理论方面。

1933 年 1 月，纳粹接管了德国政权。新政府随即施行的一系列法律极大地改变了大学及各个部门的工作状况，让大多数具有犹太血统或不同政治立场的人失去了他们的工作甚至养老金。1932 年底，霍普夫从美国到德国作了一次短暂的访问。返回美国后，他在给苏联移民同事 Tamarkin 的信中写说：“我很惊讶有这么多德国人投票支持希特勒。……大多数投票给希特勒的人都是对政府和自己的处境不满。他们跟随任何向他们提供各种不可能实现的承诺的人。”

1934 年，霍普夫出版了专著《辐射平衡的数学问题》（Mathematical problems of radiative equilibrium）。20 世纪 40 年代以后，这一理论在解析函数边值问题、调和分析及算子理论的基础上得到了系统的发展，成为研究各种数学物理问题的一种常用方法，其应用也从辐射问题扩展到许多其他领域。

1933 年起，德国莱比锡大学持续地为已故数学讲座教授莱昂·利希滕斯坦（Leon Lichtenstein, 1878-1933）寻找继任者，最后于 1936 年遴选出霍普夫。霍普夫接受了聘请，并于同年 10 月抵达莱比锡。事实上，此前波恩大学、哥廷根大学和柏林大学也曾邀请霍普夫去工作，但都没有成功，因为有人向纳粹政府告发他“学生时期有一个朋友是共产党人”。

霍普夫在莱比锡大学任职至1944年。1937年，他综合在麻省理工学院的研究成果，出版了数学专著《遍历理论》（Ergodentheorie）。1942年，柏林政府的纳粹官员指派霍普夫到位于巴伐利亚 Aining 的德国科学研究院工作。在那里，他主要做量子力学、流体动力学和湍流理论研究。因为这段工作经历，后来有人说他的这些可被战争利用的研究是为纳粹服务，甚至还有人伪造他的论文加以攻击。2017年，霍普夫的物理化学家女儿芭芭拉·霍普夫·奥芬哈茨（Barbara Hopf Offenhartz）在一篇文章中回忆道：“我的父亲非常反对纳粹，所以亲纳粹分子的各种极端言行让他深感不安。我父亲为了自己的声誉太过直言不讳。”

1944年，慕尼黑大学在长时间寻找退休数学讲座教授康斯坦丁·卡拉西奥多里（Constantin Caratheodory, 1873–1950）的继任者之后，决定把该职位提供给霍普夫。霍普夫接受了慕尼黑大学的聘任，合约到1948年终止。1945年6月23日，他写了一封信给美国纽约大学数学家理查德·柯朗（Richard Courant, 1888–1972），说他在纳粹德国工作因缺乏政治支持而一直感受着痛苦。柯朗得知后，便邀请他1947年到美国纽约大学柯朗数学科学研究所当客座教授。霍普夫于是去了纽约，并在1949年成为美国公民。随后，他接受了印第安纳大学数学教授职位，工作至1972年退休。他在伯明顿市生活到1983年病世。1951年–1981年这三十年间，霍普夫一直担任印第安纳大学数学杂志编辑。期间，他曾多次回访德国，主要到埃尔兰根（Erlangen）大学和奥伯沃尔法赫（Oberwolfach）数学研究所作学术交流。

1956年，霍普夫曾收到德国海德堡大学的一份工作邀请。但他对当年的纳粹心有余悸，“不想再犯同样的错误”，婉言谢绝了。



图2 霍普夫在讲课（1970）

【二】成就

霍普夫在 1926 年-1971 年间出版了 5 部专著并发表了 79 篇论文，其中 1 本书和 41 篇文章为德文，4 本书和 38 篇文章为英文。

霍普夫在遍历理论、偏微分方程、积分方程、流体动力学和微分几何方面都有重要贡献。他在 1927 年发表的极大值原理是椭圆偏微分方程理论中最重要的技术之一。除了上面提到的维纳-霍普夫方法之外，他对拟线性双曲方程的处理提供了研究守恒定律的第一个现代方法。他证明了具有非齐次边界条件的纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程弱解的存在性定理，是该领域一项突破性的进展。

在这里我们关心的，是霍普夫 1942 年在一篇奠基性论文[4]中提出的动力系统分岔理论。他引进的概念和术语为后人采用。他详细地讨论了自己的结果与庞加莱 (Jules Henri Poincaré, 1854-1912) 工作的联系，并将该论文献给在 1907 年解决了希尔伯特第 22 问题的德国数学家保罗·克伯 (Paul Koebe, 1882-1945)。

庞加莱-安德罗诺夫-霍普夫分岔理论，通称为“霍普夫分岔”理论，是首先由庞加莱在 1892 年对平面系统进行研究的[5]，然后由亚历山大·安德罗诺夫 (Aleksandr Andronov, 1901-1952) 及其合作者在 1930 年进行了完善和细化[6]，最后由霍普夫在 1942 年扩展到一般高维系统。粗略地说，霍普夫分岔是非线性常微分方程自治系统的一种动力学现象，指随着某个关键参数的连续变化，系统在其平衡点附近相应的雅可比矩阵的一对共轭复数特征值从左半平面垂直横跨虚轴而转移到右半平面，在跨越的瞬间改变了平衡点的稳定性，导致系统产生出一个新的周期解。

今天，数学文献中以霍普夫命名的术语包括：Hopf bifurcation、Hopf decomposition、Hopf factorization、Hopf lemma、Hopf maximum principle、Cole-Hopf transformation、Landau-Hopf theory of turbulence、Wiener-Hopf method 等。

由于霍普夫对数学研究的诸多重要成果和开创性贡献，1950 年他被国际数学家大会邀请作大会报告。1971 年，他在美国数学会作了荣誉很高的 Josiah Willard Gibbs 讲座。1981 年，他获得美国数学会最高奖 Leroy P. Steele Prize。2002 年，美国数学会出版了《艾伯哈德·霍普夫选集》(Selected Works of Eberhard Hopf)，作为对霍普夫百岁诞辰的纪念。

印第安纳大学数学杂志在 1983 年最后一期刊登的悼念文章结语中说：“霍普夫在其四十五年的职业生涯中不仅为数学知识的增长做出了重大贡献，而且在确立现代数学研究的形式和方向方面也发挥了重要作用。虽然他一些工作的影响是立竿见影的，但其大部分工作的深度和广度只有在经过多年的进一步研究后才会完全显现出来。他激励了我们所有人；他作为数学领导者将被深深怀念。”

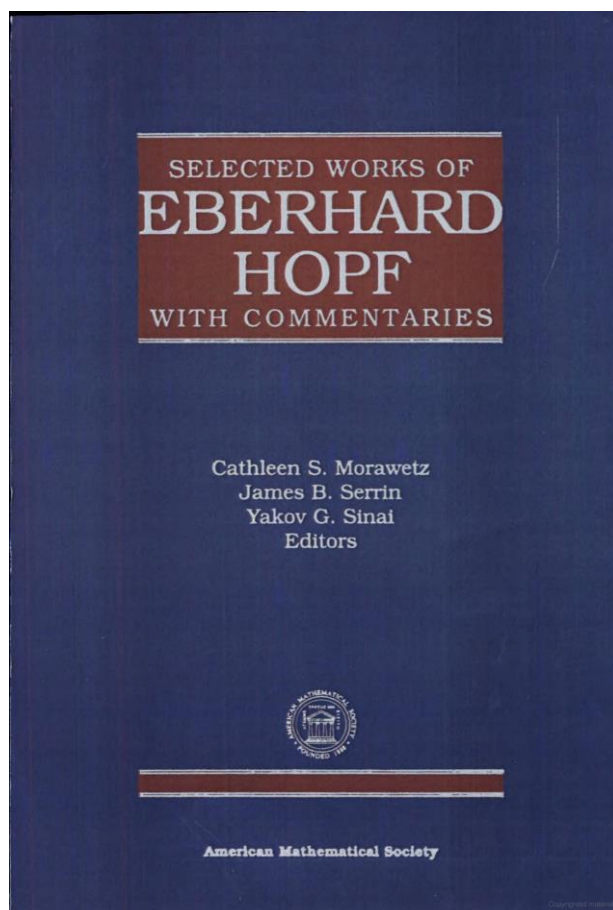


图3 《艾伯哈德·霍普夫选集》（美国数学学会，2002）

【三】注记

和艾伯哈德·霍普夫同时代有另一位德国数学家海因茨·霍普夫（Heinz Hopf，1894年11月19日–1971年6月3日），是20世纪最重要的拓扑学家之一，以其在代数拓扑学和微分几何学中的杰出贡献而闻名于世。他的研究工作主要在纤维化、同伦论、基本群以及流形的几何性质方面，其成果为现代拓扑学奠定了基础，并深刻地影响了物理学量子场论和弦理论以及计算机科学拓扑数据分析的进展。虽然都姓“霍普夫”，没有记录表明他俩有直接的血缘关系。不过，科普文献中不乏张冠李戴的作品，把他们两人的数学贡献混为一谈，因此大家阅读时需要小心鉴别。

参考文献及延伸阅读：

- [1] 陈关荣：这门复杂性科学有个别致的名称——混沌
- [2] 陈关荣：离散混沌传奇
- [3] 陈关荣：蝴蝶效应和混沌故事
- [4] E. Hopf, Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, Berichte der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Band XCIV, Sitzung vom 19, Januar 1942, pp. 3-22.
- [5] H. Poincaré, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. 1 (Gauthier-Villars, Paris, 1892).
- [6] A. A. Andronov, A. A. Vitt and S. E. Khaikin, Theory of Oscillators, translated from the Russian by F. Immirzi, edited and abridged by W. Fishwick (Pergamon Press, Oxford, 1966).