

刘徽

——中国古代最伟大的数学家

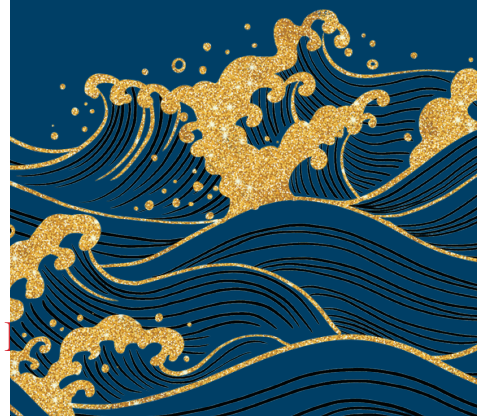
陈关荣

2023年11月,第42届联合国教科文组织大会将2024-2025年命名为“刘徽年”并审议通过了由中国科学技术协会提出于2024-2025年期间在世界范围内开展“刘徽诞辰周年系列纪念活动”的申办建议。2024年9月24日,联合国教科文组织在位于法国巴黎的总部召开了启动仪式,举办了一个“九章流徽——中国古典数学理论的主要奠基人刘徽”专题展览,拉开了纪念活动的序幕。该启动会议和展览由中国科学技术协会和中国联合国教科文组织全国委员会共同主办、中国科学技术协会科学技术传播中心承办,是我国首次在联合国教科文组织举办以中国科学家诞辰为主题的周年纪念活动。



图1.“九章流徽——中国古典数学理论的主要奠基人刘徽”专题展览
(法国巴黎,2024年9月23日-27日)

2024年10月22日,位于北京的中国科学家博物馆也举办了一个相同专题的展览,至12月31日结束。



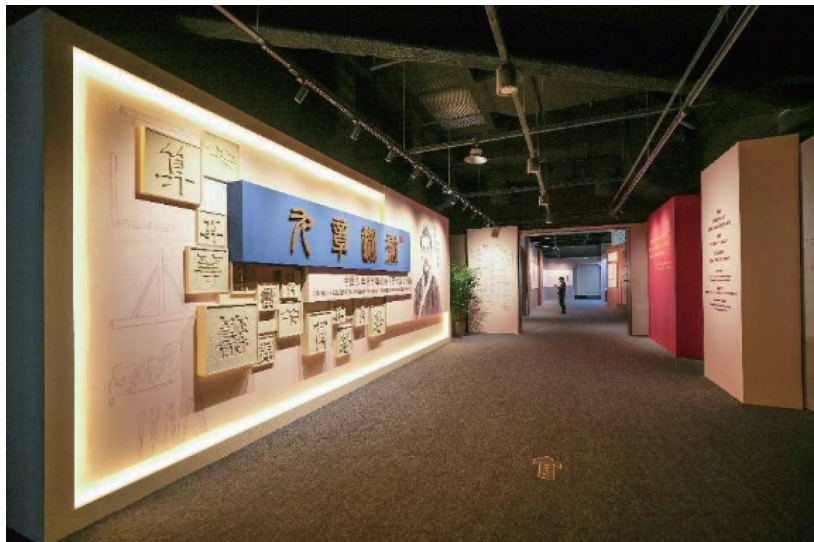


图2. “九章流徽——中国古典数学理论的主要奠基人刘徽”专题展览
(中国北京, 2024年10月22日-12月31日)

【一】学术成果

刘徽, 生卒年月不详。他出生在魏国淄乡即山东滨州市邹平县, 是“孙子兵法”的作者、军事家孙武的同乡。关于刘徽的生平, 史籍中没有留下什么记录, 后人只知道他终生未仕, 是一个毕生致力于算学研究的“民科”。刘徽的家境如何不得而知, 但他青少年时期是个用功读书之人, 曾自述:“徽幼习《九章》, 长再详览。观阴阳之割裂, 总算术之根源, 探赜之暇, 遂悟其意。是以敢竭顽鲁, 采其所见, 为之作注。”

这里提到的《九章》, 是古代中国流传下来的最重要数学著作《九章算术》, 后更名为《九章算术》, 其中“算”是古代计数用的筹码。这是一本算学书, 作者不详。它也许不是一人一时之作, 而是在多年里由若干学者先后加工整理出来的一本未经审定的汇集。有记录的是, 西汉初期丞相科学家张苍和西汉中期的天文学家耿寿昌对之作过增补删订, 后来刘徽写了注释, 到唐初再由天文数学家李淳风加入更多注释, 之后成为通行本。

《九章算术》采取以算题为示例的写作形式, 其内容包含了十分丰富的算学知识并总结了战国和秦汉时期中国算法式数学的卓越成果。这部经典全书分九章, 共有 246 个例题。

书中第一章“方田”是“以御田畴界域”, 解决田地面积计算问题, 概括了平面几何图形面积如长方形、等腰三角形、直角梯形、等腰梯形、圆形、扇形、弓形、圆环等八种图形面积的计算方法, 以及分数的四则运算法则和求分子分母最大公约数等方法。

第二章“粟米”是“以御交质变易”的计算, 提供了谷物粮食的比例换算方法, 包括名为“今有术”的计算技术。

第三章“衰分”详细论述了比例分配问题。

第四章“少广”则讨论了已知面积或体积反求边长和径长等逆问题，介绍了世界上最早的开平方和开立方算法。

第五章“商功”是关于土石工程中的体积计算方法，“以御功程积实”，给出了几种立体体积公式和一些相关的工程分配计算方法。

第六章“均输”论及合理摊派赋税，“以御远近劳费”，用衰分术计算赋税中的合理负担问题，构成了包括正反比例、比例分配、复比例、连锁比例在内的一套比例计算公式。

第七章“盈不足”讨论“以御隐杂互见”即双设法问题，提出了盈不足、盈适足和不足适足、两盈和两不足等三种类型的盈亏问题，以及若干一般盈亏问题的解法。

第八章“方程”研究一次方程组，提出了世界上最早的线性方程组解法，采用分离系数法来表示线性方程组，相当于现在的矩阵表达、变换和求解方法。

第九章“勾股”则“以御高深广远”，利用“勾股术”求解多种算术问题，给出了世界上最早的勾股数组通解公式，并将之应用到勾股容圆和简单测望等计算问题。

《九章算术》成果斐然，但也错谬不少。其中最大的缺陷，是没有关于各种算法如何得来的任何说明以及为何这些算法行之有效的任何证明。刘徽的主要贡献，就是以给《九章算术》作注的方式，补足了书中算学知识的论证和说明，并建立起一个较为完整的算术系统，为中国古典数学奠定了基础理论。此外，刘徽还给该书最后一章提到的“重差术”拟出了几个新问题，并集其解答写成了第十章，称为“重差”，内中记录了关于海岛高度和长宽度测量计算问题的多种计算方法和表达公式。唐初，这新添的部分被单独抽出来印发成书，取名《海岛算经》。清代乾隆时期，该书被编入《四库全书》，并先后被翻译为英文、法文、日文和俄文等多国文字。

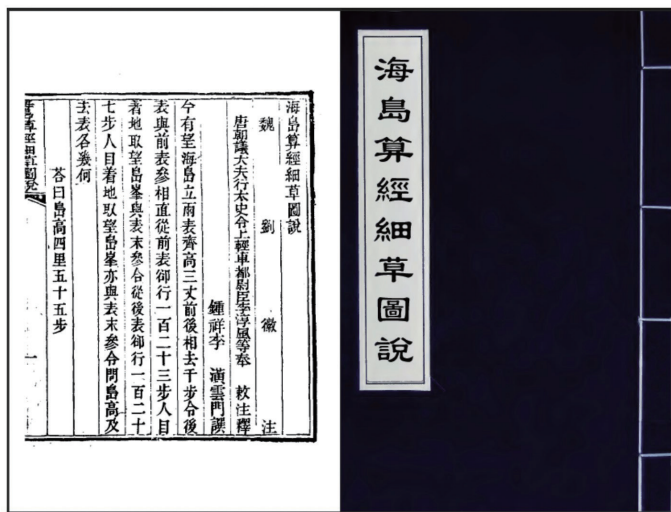


图 3. 刘徽著《海岛算经》(收录在清朝《四库全书》)

刘徽一生最大的贡献，是完成了《九章算术注》和《海岛算经》两部重要著作。

刘徽的《九章算术注》在公元 263 年前后成书，其时他年约三十。该书留下了许多创造性的算学成果。之后，刘徽在《集句五百章》中又讨论了如何用“分割法”去计算三角形面积并将其思想发展为“弧田术”，用于计算弓形面积。刘徽在多边形面积和多面体体积的计算方面均有建树，特别是以“出入相补原理”求解多边形面积，并提出了“牟合方盖”方法，利用两个圆柱体正交的公共部分去计算球体体积，修正了《九章算术》中的球体体积公式。他还将锥形多面体分割成有限多个长方体以及他称为“堑堵”“阳马”和“鳖臑”等不规则形状的多面体，然后求其体积之总和。在“商功”一章为“阳马术”作注之中，他利用中截面的分割去计算体积，建立了“刘徽体积原理”。

刘徽最重要的数学成果是获得了精确的圆周率。《九章算术》第一章的“方田引题”中有问：“今有圆田，周三十步，径十步，为田几何？”其答案是面积，但引出了“周三径一”的关系，即周长是三的圆直径为一，也就是说圆周率的近似值为 3。不过，书中没有给出任何解释，更没有去证明这个论断。东汉科学家张衡采用 $\pi = \frac{736}{232} = 3.172$ 和 $\pi = \sqrt{10} = 3.16$ ，而东汉天文学家王蕃则采用 $\pi = \frac{142}{45} = 3.156$ 。刘徽认为这些估算过大，都不准确。于是他决定对之加以修正。他用内接正六边形去近似圆周，然后把它细分为正十二边形以获得更精确的近似结果。他就这样细分再细分，直到靠手算无法再细分为止。他把这种逼近算法称为“割圆术”。刘徽的割圆术是一种迭代方法，简单严谨，理论上可以无限分割下去，求得越来越精确的圆周率。和古希腊数学家阿基米德获得的 $3.140845 < \pi < 3.142857$ 相比，刘徽的结果 $3.141024 < \pi < 3.142704$ 显然精确多了。他还发现了一个快捷算法，只需采用 96 边形，经过简单运算，便可以获得与逼近法计算到 1536 边形相当的精确度，最后得到圆周率为 $\pi = 3.1416$ 。这是当年（公元 200–300 年间）世界上最精美的结果。

刘徽在《九章算术注》里把割圆术及其结果记录于第一章“方田”第 32 题的注释中。他写道：“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”可见他已经有了非常清晰的“极限”概念。当然，在古老中国，极限的概念还可以追溯到战国时期，《庄子·杂篇·天下》中写道：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

事实上，《九章算术》已经使用了自然数、分数和正负数，虽然还无法表达平方根和立方根，而且许多概念的表达都含糊不清。刘徽一举改变了《九章算术》中数学名词“约定俗成”的做法，在“审辨名份”的原则指导下，对二十多个数学概念给出了明确的定义，诸如正负数、率、幂以及有关“方程”的一些数学术语。在《九章算术》中，“率”是使用得最多的名词之一。刘徽把它明确地定义为“数相与者”，指出：“凡所谓率者，细则俱细，粗则俱粗，两数相推而已。”也就是说，“率”是数与数之间所存在的比例关系。刘徽利用率的性质证明了一些“今有术”中的比例算法计算公式，并论证了分数运算、盈不足术、合比定理以及方程组解法原理。

刘徽在“开方术”的注释中创造了“求微数法”，对于求开方时算不尽的数值，

提出了“求其微数”，以十进分数无限逼近无理数，实质上表达了实数的概念及其刻画。

综而观之，刘徽的割圆术、牟合方盖、刘徽原理和以重差术为基础的测量计算方法等，是一系列的开创性算学成果，为中国古典数学理论奠定了坚实的基础。

【二】治学态度

刘徽在《九章算术注》中写道：“且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。……当今好之者寡，故世多通才达学，而未能综于此耳。”就是说，作为六艺之一的算术，古人赋予它的功能是选拔教师和培养人才。当下虽然为实用而学习算术的通才达学之人很多，但是能够“穷纤入微，探测无方”、寻根究底去探索算学未知原理和方法的“好之者”却非常之少。

刘徽认为算学并不神秘，是可以研究清楚的。他在《九章算术注序》中写道：“至于以法传法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特为难为也。”他还写道：“虽夫圆穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广载。”也就是说，天穹规模的现象都可以观测，更何况区区泰山和小小江河的测量和计算呢。

刘徽重视算学研究的方法论和系统性。他在《九章算术注序》中说：“又所析理以辞，解题用图，庶亦约而能周，通而不黷，览之者思过半矣。”他还说：“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干知，发其一端而已。”刘徽强调以言辞作解释，用图形助解题，是正确的算学思维方法。

刘徽在《九章算术注序》中说：“徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造《重差》，并为注释，以究古人之意，缀于《勾股》之下……触类而长治，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览之。”其中，他把史籍中观测天地事物数量关系的记录称为“阐世术之美”，暗喻他为《九章算术》和《重差》作注，同样是为了探寻未知算学规律之美。

【三】后人后事

南北朝时期著名数学家祖冲之及其儿子祖暅运用刘徽发明的割圆术，计算圆内接正 6144 边形和正 12288 边形的面积，把圆周率估算到 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ ，成为此后千年内世界上获得的最准确圆周率。祖冲之还提出了“约率 $= \frac{22}{7}$ ”（与阿基米德的结果相同）和“密率 $= \frac{355}{113}$ ”。但祖冲之是如何算出这些惊人的准确数字来的，历史书上并没有记录，也没有人猜得出来。似乎他依然使用了刘徽的割圆术。但是，如果真是这样，祖冲之需要算到正的 $6 \times 2^{12} = 24576$ 边形才能得到这个结果。当年要实现这样大规模的计算，实属天方夜谭。据文献记载，祖冲之把他父子二人的主要计算方法和成果写成了一本算经著作《缀术》。十分可惜的是，该书早已失存，残留的几项成果都是在刘徽计算方法的基础上获得的。

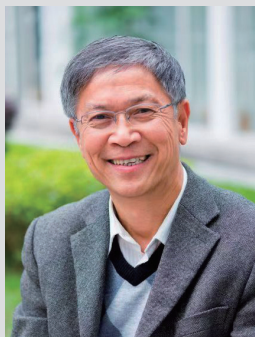
【四】铭记怀念

2021年5月，经国际天文学联合会批准，中国嫦娥五号在月球着陆点附近的一个环形坑被命名为“刘徽”坑。嫦娥五号着陆点附近还有另外四个环形坑，分别被命名为“裴秀”（魏晋时期地理学家）、“沈括”（北宋天文学家、数学家）、“宋应星”（明末科学家）和“徐光启”（明代天文学家、数学家）。此外，在月球上以中国地名命名的环形坑至今多达35个。

刘徽被认为是中国古代最伟大的数学家。2023年联合国教科文组织将2024–2025年命名为“刘徽年”并在世界范围内开展各种“刘徽诞辰周年系列纪念活动”，值得中国人民骄傲和自豪。



图4. 刘徽塑像（山东滨州刘徽数学研究会）



作者简介：

陈关荣，香港城市大学电机工程系讲座教授，欧洲科学院院士和发展中国家科学院院士。

延伸阅读：

陈关荣：圆周率趣谈 <https://mp.weixin.qq.com/s/a-NHR7aIJ2y8Neu0lpVXQQ>

陈关荣：历法趣谈 https://mp.weixin.qq.com/s/5aXs7UFstiOAOy416K_r6g