

混沌理论背后的影子数学家

陈关荣

(香港城市大学)

混沌理论背后有个影子数学家——诺曼·莱文森 (Norman Levinson, 1912 年 8 月 11 日 -1975 年 10 月 10 日)



图 1 诺曼·莱文森 (1912-1975)

【一】

莱文森于 1912 年 8 月 11 日出生在美国麻省 Lynn 镇一个贫穷的俄罗斯犹太移民家庭。他父亲是个鞋厂工人，靠每周 3 美金的工资养活全家，母亲是个文盲。莱文森有个妹妹 Pauline。后来，随着父亲转换工作，全家搬到了不远的 Revere 镇，在那里一家人住

的小房子连浴室都没有，冬天靠厨房里的油炉取暖。莱文森就读于 Revere 高中。他白天上课，晚上在杂货店做工以帮补家庭。有一次，他因发烧被诊断出患有风湿病。后来，风湿病越来越严重，致使他无法参加任何体育活动。这疾病导致他患上终生疑病症（Hypochondriasis）。

1929 年，莱文森中学毕业后进入麻省理工学院（MIT）电机工程系。1934 年，他完成了学士和硕士学位。莱文森在读书期间还修完了数学系提供的几乎所有研究生课程，其中有诺伯特·维纳（1894–1964）讲授的 Fourier 级数和 Fourier 积分。1933 年，维纳让莱文森参考一份未发表的手稿“复平面上的 Fourier 变换”，署名作者是雷蒙德·佩利（Raymond E. A. C. Paley）和维纳。莱文森发现证明中存在漏洞并修改了主要引理。维纳随即作了更正，并亲自用打字机加上莱文森的名字作为合作者，随后正式投稿发表。这篇文章留下了一条著名的“Paley–Wiener–Levinson Theorem”。1934 年，莱文森转到了数学系，正式师从维纳攻读博士学位。莱文森后来回忆说，“维纳教授说服了我，让我把专业从电机工程改为数学。然后，他还去看望了我的父母——生活在破败的贫民窟社区里没受过教育的移民工人——向他们保证我在数学方面一定会有好的未来。”事实表明，维纳慧眼识人，研究生莱文森的数学学得很好，研究也做得很好。时任数学系主任亨利·菲利普斯（Henry B. Phillips）教授说，莱文森提交给维纳的论文报告“足够一篇异常优秀的博士论文”（“sufficient for a doctor’s thesis of unusual excellence”）。



图 2 学生时代的莱文森

菲利普斯和维纳认为莱文森的学问已经达到博士水平，便为他争取到了 MIT 的 Redfield Proctor 外访资金，让他前往英国剑桥大学访学，师从数学家戈弗雷·哈代（Godfrey H. Hardy）。1934–1935 年，莱文森在剑桥期间，头四个月就发表了两篇论文。1935 年，莱文森回到 MIT，以题为“Non-vanishing of a function”的博士论文获得博士学位并随即获得国家研究委员会（National Research Council）资助到普林斯顿高等研究院从事博士后研究，师从冯·诺依曼（John von Neumann），至 1937 年正式入职 MIT。

说到莱文森入职 MIT，还有一段传奇轶事。

20 世纪 30 年代中期，美国遭遇经济大萧条，到处是大批的失业者。这段时期，美国本土还兴起了反犹太主义风潮。这局势让犹太裔的莱文森无法找到合适的教学工作。1936 年，MIT 数学系的菲尔兹奖获得者杰西·道格拉斯 (Jesse Douglas) 重病无法正常授课，于是维纳建议学校聘请莱文森来接替他的教学。但 MIT 的反犹太主义让行政部门拒绝了维纳的推荐。这一年，适逢哈代到美国参加普林斯顿大学校庆时顺道访问了 MIT，由时为 MIT 副校长兼工学院院长万尼瓦尔·布什 (Vannevar Bush) 陪同。据莱文森妻子 Fagi 回忆，当时哈代对布什展示的 MIT 各种先进机械科研成果表示赞赏，说“多么奇妙的神机构！”布什笑着回应道：“这里可不是神学院。”哈代便问：“那么你们为什么不雇用莱文森？”于是莱文森获得了 MIT 的一个讲师职位。

1938 年，莱文森与 Zipporah (Fagi) Wallman 结了婚。她是拓扑学家亨利·沃尔曼 (Henry Wallman) 的妹妹。夫妇俩有两个女儿，Sylvia (1939) 和 Joan (Zorza, 1941)。

之后，莱文森一直在 MIT 工作。他于 1944 年晋升副教授，1949 年成为正教授，1971 年出任讲座教授 (Institute Professor)。1975 年 10 月 10 日，莱文森因脑瘤不治在波士顿的麻省公立医院去世，享年 63 岁。他的遗孀于 2009 年去世，享年 93 岁。

【二】

莱文森的主要数学贡献在复分析、非线性微分方程、数论、Fourier 变换和信号过程等领域。

1935–1940 年间，莱文森致力于调和分析与复分析研究。他的工作深受佩利和维纳“复平面上的 Fourier 变换”的影响。初出道这几年是莱文森研究成果累累的时期。他发表了 15 篇文章，其中许多结果连同其它一些主要成果都收集在他 1940 年由美国数学学会出版的《间隙和密度定理》(Gap and Density Theorems) 一书中。该书包括了他关于复变量指数序列的完备性、在一个区间内消失的 Fourier 变换，解析函数以及 Dirichlet 级数的许多特性分析，在最后部分还给出了 Hardy–Littlewood 关于 Tauberian 定理的一个漂亮总结。

之后，莱文森转向了线性和非线性常微分方程及偏微分方程的研究。这是一个非常广阔的研究领域，其中莱文森的主要贡献要从荷兰电气工程师巴尔塔萨·范德波尔 (Balthasar van der Pol) 的电器研究说起。

1927 年 9 月，范德波尔在《Nature》杂志上发表了一篇短文，其中写下了一个张弛振荡器 (relaxation oscillator) 的微分方程：

$$\ddot{x} - k(1 - x^2)\dot{x} + x = bk\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$$

式中 k, b, λ, α 为参数。后来知道，这个方程和瑞利勋爵 (Lord Rayleigh) 的方程是等价的，它还可以看作是阿尔弗雷德-玛丽·李纳德 (Alfred-Marie Liénard) 方程的一种特

别情形。不过，这个方程极限环的存在性是范德波尔在 $k > 0$ 和 $b = 0$ 条件下从实验中证实的。在 $k > 0$ 和 $b \neq 0$ 以及 $\lambda \neq 0$ 即有驱动信号输入时，在某种自然频率下他听到了来自这个确定性系统内部的“毫无规律的噪声”。后来科学家们认识到，这是最早在实验中观察到物理混沌现象的报告。

1945 年，英国数学家玛丽·卡特赖特 (Mary L. Cartwright) 和约翰·李特尔伍德 (John E. Littlewood) 仔细地研究了范德波尔方程，从分析中发现了一些意想不到的复杂动力学现象，包括不连续周期运动的存在。他们的工作引起了莱文森的浓厚兴趣。莱文森考虑了较为一般的微分方程

$$a\ddot{x} + p(x)\dot{x} + ax = b \sin(t)$$

其中 a 是一个小常数， $p(x)$ 是分段线性函数，满足 $|x| > 1$ 时 $p(x) = 1$ ， $|x| < 1$ 时 $p(x) = -1$ ，而常数 b 从定义区间中取值。莱文森的这个方程和范德波尔方程在感兴趣的范围内具有相同的动力学现象。莱文森证明了，这个方程的庞加莱映射有一个奇异吸引子 (singular attractor)，它是一个并不组成 Jordan 曲线的点集，包含无穷多个周期轨道和不连续的递归 (recurrence) 运动。

多年以后，动力系统领域著名数学家于尔根·莫塞尔 (Jürgen Moser) 评论说：“必须强调的是，莱文森的论文不仅仅是验证了一个已知结果。卡特赖特和李特尔伍德的原始工作以及他们随后的论文是较为粗略的……而且非常晦涩，像是李特尔伍德随意写下的。当我在 1977 年 6 月询问他时，他回答说：‘呵呵，你说[我们]那篇怪诞文章吗，它在世界上只有三个人看过：两位作者和 [Peter] Swinnerton-Dyer。’所以，莱文森的一项重大成就是为该理论提供了一个明确的证明。”换句话说，莱文森事实上为混沌理论提供了最早期的严格数学论证。

另一件同样至关紧要的事件是莱文森对数学大师史蒂夫·斯梅尔 (Steve Smale) 混沌马蹄理论的贡献。

1959 年，斯梅尔在巴西里约热内卢著名的纯粹和应用数学研究院 (IMPA) 做博士后研究。年轻的斯梅尔在一篇自我得意的文章中提及了他的一个猜想：“混沌不存在！” (“chaos doesn't exist!”)。他推测三维以上的微分动力系统不可能有无限多个周期轨道。如果这个猜想是对的话，人们就会放弃对混沌吸引子的进一步探究。但是，让斯梅尔大吃一惊的是，莱文森给他发信提供了一个反例，证明他的想法是错误的，并建议他去看卡特赖特和李特尔伍德的文章。后来，斯梅尔在 1998 年为《数学信使》 (Mathematical Intelligencer) 写的一篇题为“在里约热内卢海滩上发现马蹄”的文章中回忆道：“[当时]我夜以继日地工作，试图解决这个挑战。……我最后说服了自己，莱文森是对的而我的猜想是错了。混沌已经隐含在卡特赖特-李特尔伍德的分析之中！现在迷团已经解开，是我作出了错误的猜测。但是在这个学习的过程中，我发现了马蹄！”此后，斯梅尔的数学马蹄理论对现代几何动力学理论的发展产生了极其重大的影响。

正如莫塞尔后来指出的那样，当年“莱文森站在了动力系统早期的经典理论和后期的几何理论发展的交叉路口上。”他促成了该学科向现代数学方向发展的重要转折。



图 4 莱文森著作选介

此外，莱文森在非线性 Volterra 积分方程方面也有一系列的开创性研究成果。

莱文森在微分方程领域的多项研究成果让他赢得了 1954 年美国数学会的 Bôcher Memorial Prize（此前，该奖曾授予 George Birkhoff、Solomon Lefschetz、Marston Morse、Norbert Wiener、John von Neumann、Jesse Douglas 等数学家）。

1967 年，莱文森被选为美国国家科学院院士。1968–1971 年间，莱文森担任 MIT 数学系主任。这段时期，莱文森引领 MIT 数学系从教学型转变为研究型，逐步走到了世界前列。

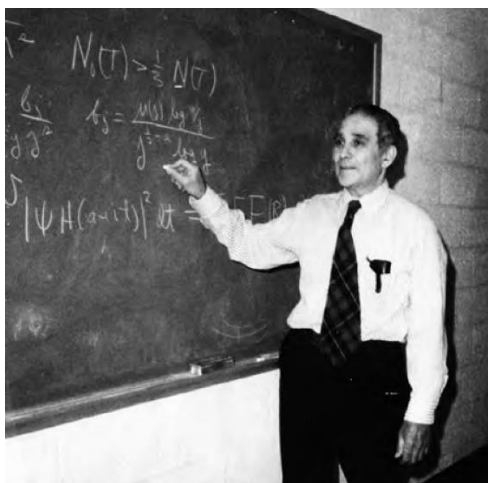


图 3 莱文森在讲课

莱文森的后半生在解析数论方向开展了很深入的研究。哈代在 1921 年一次讲座上说：“目前没有见到关于素数定理（prime number theorem）的任何初等证明，因此人们不禁要问是否可能有这样的证明。这样一种不依赖于函数理论的证明依我看来是不太可能的。”但是，1948 年保罗·埃尔德什（Paul Erdős）和阿尔特·塞尔伯格（Alte

Selberg) 分别独立地给出了初等证明, 尽管不太好懂。1969 年, 基于塞尔伯格的思路, 莱文森在《美国数学月刊》(American Mathematical Monthly) 上发表了“A motivated account of an elementary proof of the prime number theorem”一文。莱文森因之获得了美国数学协会颁发的 1971 年 Chauvenet Prize (此前, 该奖曾授予 G. H. Hardy、Dunham Jackson、Paul Halmos、Mark Kac、Philip J. Davis、Jack K. Hale、Joseph P. LaSalle、陈省身等数学家)。此前, 在 1970 年莱文森还获得过美国数学协会颁发的 Lester Ford Award。1974 年, 莱文森在一篇著名论文中证明了, 黎曼 zeta 函数的无穷多个非退化零点单零点并且有超过 $1/3$ 这样的零点位于临界线上。该结果后来被约翰·康利 (John B. Conrey, 1955-) 提高到 $2/5$ 。

【三】

莱文森毕竟拥有电机工程学士和硕士学位, 他对应用数学情有独钟。

莱文森早期的研究是在导师维纳特别专长的数据预测和滤波理论方面。莱文森在他的一篇关键文章中说, 他的研究是“定量地确定讯息和噪音可以分离到某种程度的方法, 并提供设计滤波器以执行该分离的方法, 还将同时考虑滤波和预测的问题。所使用的均方根误差方法是诺伯特·维纳开创的先验方法的近似和简化”。

莱文森还通过建立波的散射数据和光谱数据之间的联系, 用 Gel'fand-Levitan 方法对薛定谔方程的逆向散射谱求解势能。他是第一个具体分析并明确使用今天在散射理论中称为 Jost 函数的人。



图 5 数学家莱文森也有出色的物理学和工程学研究