

刘维尔：一位纯粹及应用数学大师

陈关荣

(香港城市大学)

约瑟夫·刘维尔 (Joseph Liouville) 是 19 世纪初期法国一位重要数学家，以他命名的数学定理有许多条。如果你在一般场合里只简单地提及“刘维尔定理”，别人一定不知道你在说他哪一条定理。

在复分析中，刘维尔定理说：所有有界整函数都是常数。

在数论中，刘维尔定理说：所有刘维尔数都是超越数。

在哈密顿力学中，刘维尔定理说：相空间中沿着系统轨道的分布函数是常数。

在微分代数中，刘维尔定理说：一个初等函数如果有初等的原函数，那么该原函数一定能写成同一个微分域上的函数加上有限个该域上函数的对数的线性组合；否则，这个初等函数便没有初等原函数。

在双周期椭圆函数理论中，刘维尔干脆给出四条定理：

刘维尔第一定理说：在一个周期平行四边形内没有极点的椭圆函数是常数；

刘维尔第二定理说：椭圆函数在一个周期平行四边形内的极点处残数之和为 0；

刘维尔第三定理说： n 阶椭圆函数在一个周期平行四边形内取任一值 n 次；

刘维尔第四定理说：在一个周期平行四边形内零点之和与极点之和的差等于一个周期。

当然，刘维尔对数学的贡献远远不止这几条定理。在详细介绍他的学术成就之前，我们先来说说他的身世。

【一】生平

刘维尔于 1809 年 3 月 24 日出生在法国加来海峡省 (Pas-de-Calais) 的圣奥梅尔市 (Saint-Omer)，1882 年 9 月 8 日在巴黎去世，享年 73 岁。他的家乡圣奥梅尔是 2018 年全球首批 18 个“国际湿地城市”之一，保存有很多历史古迹和文物，是法国著名旅游景点。



图 1 约瑟夫·刘维尔肖像

刘维尔的父亲克劳德-约瑟夫·刘维尔 (Claud-Joseph Liouville, 1772-1852) 是拿破仑军队里的一位陆军上尉，母亲名叫泰雷兹·巴朗 (Thérèse Balland, 1774-?)。刘维尔是他们的次子，幼年先后就读于科梅尔西 (Commercy) 和图尔 (Tours) 两地。1825 年，刘维尔进入巴黎综合理工学院 (École Polytechnique)。期间，他选修了物理学家安德烈·安培 (André-Marie Ampère, 1775-1836) 的分析与力学课程以及数学家弗朗索瓦·让-阿拉戈 (D. François Jean Arago, 1786-1853) 的数学课程。在那里，刘维尔还受到数学家奥古斯丁-路易·柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857) 的极大影响。

1827 年 11 月，刘维尔转入国立桥梁与公路学校 (École Nationale des Ponts et Chaussées) 并于 1831 年获得学士学位。毕业后，他辞去了在伊泽尔省 (Isère) 的工程师职务，希望能找到一份大学教职，以便专心从事他十分有兴趣的学术研究。

1830 年，刘维尔给《纯粹数学与应用数学年鉴》 (Annales de Mathématiques Pures et Appliquées) 投去了他的第一篇数学论文。很快，他收到了主编约瑟夫·杰贡 (Joseph Diez Gergonne, 1771-1859) 的回复：“我不想质疑刘维尔先生的数学能力。但如果这种能力没有与组织材料的艺术以及写作出可阅读、可理解、可欣赏的作品的艺术相伴，那它有什么意义呢？不幸的是，如今有太多的年轻人，尽管在其他方面都极有才华，却将这种艺术视为一种不重要的附属品。但是，我认为这种艺术才是最重要的、最卓越的；如果没有它，其他一切都将毫无价值。”刘维尔开始明白，原来数学论文的写作和它报告的数学结果同等重要。

1831 年 11 月，刘维尔被巴黎综合理工学院聘用，为天文学家克劳德-路易·马太 (Claude-Louis Mathieu, 1783-1875) 讲授的分析与力学课程担任助教，从此开始了近半个世纪的教学和研究生涯。开始时，刘维尔的工作是十分艰苦的，他每周有 34 小时的授课任务，而且通常还包括星期天早上 8 点开始的课程。

1833-1838 年间，刘维尔在巴黎中央高等工艺制造学校 (École Centrale des Arts et Manufactures de Paris) 讲授数学和力学。期间，他于 1836 年完成了博士学位，导师

是数学家西蒙·泊松（Siméon Denis Poisson, 1781-1840），论文题目为“关于函数或其部分的正弦与余弦级数展开”（Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus），探讨了傅里叶级数及其在力学和物理学问题中的应用。几年间，他向巴黎科学院提交多篇论文，涉及电动力学、偏微分方程和热的数学理论。

1836 年 1 月，刘维尔创办了《纯粹与应用数学杂志》（Journal de mathématiques pures et appliquées）月刊并担任主编。他在杂志第一期 14-32 页上发表了自己博士论文的主要成果。他亲自主持了杂志前 39 卷的编辑出版工作，至 1874 年止。杂志出版社则几经转换，目前在爱思唯尔（Elsevier）公司旗下。这本杂志刊登纯粹及应用数学领域所有分支的论文，记录了 19 世纪中期约 40 年间欧洲数学研究的部分重要内容。该杂志当年声誉极高，被称为“刘维尔杂志”（Journal de Liouville）。

任职杂志主编期间，刘维尔与一些主流数学家保持着密切联系，经常和他们讨论数学问题并发表他们的研究成果。1832 年初，他收到了年轻人埃瓦里斯特·伽罗华（Évariste Galois, 1811-1832）用群论解决代数方程求解问题的文章后，便立即进行了审编。同年 5 月，伽罗华在一次决斗中被杀。之后，刘维尔细心地整理了他的遗稿并于 1846 年在杂志上以伽罗华的名义正式发表。该论文引起了极其广泛的关注，并成为了抽象代数学的起点。

1838 年，刘维尔转到巴黎综合理工学院，替代克劳德-路易·马太成为分析与力学课程的讲席教授。他在那里工作到 1841 年，然后加入法兰西学院（L'Institut de France）任数学讲席教授。期间，1839 年，刘维尔被选为巴黎科学院天文学部院士。1840 年，他接替刚去世的西蒙·泊松担任国家标准计量局（Bureau des Longitudes）委员。

之后，刘维尔的学术研究因参与政治活动而有所中断。

1843 年，法兰西学院数学家西尔维斯特·拉克鲁瓦（Sylvestre F. Lacroix, 1765-1843）去世，刘维尔申请继任。但是，经过激烈的竞争后，意大利籍数学家古列尔莫·利布里（Guglielmo Libri, 1803-1869）获胜。刘维尔愤愤不平，随即辞去了法兰西学院的教职。后来，和拉克鲁瓦生前一样，刘维尔也成了利布里的对头人，两人多年里甚至在科学院许多会议上常常互相攻击。事实上，除利布里之外，刘维尔还跟数学家约瑟夫·塞雷特（Joseph Alfred Serret, 1819-1885）、天文学家菲利普·杜尔塞（Philippe Gustave Doulcet, 1795-1874）以及因计算出海王星的存在而闻名的数学家和天文学家乌尔班·勒维耶（Urbain J. J. Le Verrier, 1811-1877）等人都有过许多争执，其中争论的焦点涉及数学有效性、方法论、重要性、严谨性、清晰度、美学、抄袭、优先权等问题。

1848 年，刘维尔在好朋友数学家及政治活动家让-阿拉戈的鼓励下参加竞选制宪议会（Constituting Assembly）议员。他成功获选，成为默尔特（Meurthe）行政区的代表之一。但次年 5 月，他参加竞选国会议员失败，政治生涯遂告结束。

1848 年，法国发生“二月革命”，推翻了国王路易-菲利普一世（Louis Philippe I, 1773-1850），建立了法兰西第二共和国。这时，利布里逃离法国去了伦敦。不过他

并非出于政治原因，而是为了逃避因盗窃珍贵书籍和手稿而被法庭判处入狱的惩罚。利布里最后病逝意大利。利布里离开后，他在法兰西学院的教席空缺。1850 年，刘维尔和柯西争夺该职位。在激烈竞争之后，刘维尔获选，并于 1851 年重新回到法兰西学院任职数学讲席教授，工作至 1879 年。

在法兰西学院，刘维尔的教学工作相当自由，有很多时间展开自己的数学研究并广泛参与学术交流活动。在这期间众多往来学者之中，德国数学家古斯塔夫·狄利克雷（Gustav L. Dirichlet, 1805-1859）是刘维尔最要好的一位朋友。狄利克雷英年早逝让刘维尔一度极其痛苦悲伤。

1851 年，刘维尔当选为瑞典皇家科学院外籍院士。1853 年，他被选为美国哲学学会会士。1857 年，他当选为法国科学院机械部主任。

刘维尔在 1874 年退出他创办的《纯粹与应用数学杂志》的编辑工作之后，便不再发表论文著作，也极少参加学术活动，直至 1882 年 9 月 8 日在巴黎去世。

刘维尔一生勤于学术研究和教学工作，除了经历过一段政治生涯之外，他的个人生活淡泊宁静。他在 1830 年与表亲玛丽-路易丝·巴朗（Marie-Louise Balland）结婚，两人有三女一子。刘维尔去世后，月球上一座环形山以他的名字命名，以示永恒铭记。

【二】贡献

刘维尔的数学研究范围非常广泛，涵盖纯数学、数学物理和天文学。



图 2 约瑟夫·刘维尔纪念邮票

1830 年，刘维尔开始研究电磁学和热学理论。他的研究推动了今天被称为分数阶微积分的数学分支的发展。微分在通常情况下是整数阶的，非整数阶微分的概念第一次出现在 1695 年德国数学家戈特弗里德·莱布尼兹（Gottfried W. Leibniz, 1646-1716）写

给法国数学家纪尧姆·德·洛必达（Guillaume F. A. Marquis de l'Hôpital, 1661-1704）的书信中。分数微积分运算则是首先出现在挪威数学家尼尔斯·阿贝尔（Niels Henrik Abel, 1802-1829）的早期论文里。刘维尔于1832-1837年间发表了一系列论文，引进了任意阶微分算子的概念，让它可以有理数、无理数，甚至还可以是复数。目前常用的是分数阶微分和分数阶积分，包括刘维尔导数以及他和德国数学家格奥尔格·黎曼（Georg F. B. Riemann, 1826-1866）联名的黎曼-刘维尔积分。

1832-1833 年间，刘维尔对基本初等函数进行了分类，划分为今天周知的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数。他研究了代数函数积分的代数准则，并通过四篇论文的论述确立了这个准则，继而研究代数函数有限项积分的问题。他的工作最初独立于阿贝尔，后来借鉴了阿贝尔的工作并将其思想融入到自己关于椭圆积分和椭圆函数的研究中。

1829-1837 年间，瑞士籍数学家查尔斯·斯图姆（J. Charles F. Sturm, 1803-1855）和刘维尔分别并合作研究了一般线性二阶微分方程，考察了它们的特征值性质、特征函数行为以及任意函数关于这些特征函数的级数展开。他们在 1837 年发表在《纯粹与应用数学杂志》的合作论文里建立了施图姆-刘维尔定理（Sturm-Liouville Theorem），将一个函数展开为一类正交函数集所构成的级数，为求解微分方程和积分方程提供了一种行之有效的普适方法。在微分方程和积分方程领域，刘维尔特别研究了边界值问题并作出了奠基性的贡献。

1833-1841 年间，刘维尔研究了初等函数的不定积分是否可表示为初等函数形式的一系列问题。其中，他关于原函数的概念是指我们对之做微分的、原来的那个函数，而做不定积分就是求原函数。刘维尔证明了：一个初等函数如果有初等的原函数，那么该原函数一定能写成同一个微分域的函数加上有限个该域上函数的对数的线性组合；否则，这个初等函数便没有初等原函数。例如，高斯分布函数 e^{-x^2} 的原函数就无法用初等函数表示出来。

1834 年，刘维尔通过研究一个流体动力学问题开始接触天体力学。期间，他试图寻找绕轴旋转的均匀流体的平衡曲面。他证明了，利用法国数学家皮埃尔-西蒙·拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace, 1749-1827）的一个公式，可以证明德国数学家卡尔·雅可比（Carl G. J. Jacobi, 1804-1851）关于不等轴椭球面平衡图形的存在性定理。1839-1855 年间，刘维尔多次研究了主题，证实了拉普拉斯方法的有效性，也展示了这些新方法的强大威力。1836-1842 年间，他撰写了一系列关于经典天体力学的论文，论及摄动、长期变化以及椭圆函数的应用。

1838-1850 年间，刘维尔对研究共形变换的微分几何做出了重要贡献。他证明了关于哈密顿（William Rowan Hamilton, 1805-1865）动力学测度不变性的重要定理，该结果对统计力学和测度论具有根本性意义。在哈密顿动力学中，刘维尔引入了作用-角变量的概念，作为完全可积系统的描述。该概念的现代表述也称为刘维尔-阿诺德（Vladimir I. Arnold, 1937-2010）定理，而可积性的基本概念被称为刘维尔可积性。1846-1849 年间，刘维尔受哈密顿和雅可比著作的影响，试图建立质点动力学理论。1855-1856 年，他重新回归该主题的研究，发表了两篇关于动力学微分方程和一篇关于最小作用量原理及其应用的重要笔记。

在几何学方面，刘维尔分别于 1841 年和 1844 年用消去法证明并推广了法国数学家米歇尔·沙勒（Michel F. Chasles, 1793-1880）建立的曲线和曲面的度量性质。他还发展了一种新方法，可以用来确定任意椭圆曲面的测地线，那是雅可比在研究双曲超越数时引出的问题。1850 年，刘维尔负责出版法国数学家加斯帕德·蒙日（Gaspard Monge, 1746-1818）的著作《分析在几何学中的应用》第 5 版，并在书末附上了德国数学家卡尔·高斯（J. Carl F. Gauss, 1777-1855）的著名文章“关于曲面的一般研究”以及他自己写的 7 篇注记。这些注记论及曲线及其相对曲率和测地曲率、测地线方程、总曲率等概念和应用。

1842 年，刘维尔开始阅读伽罗华用群论解决代数方程求解问题的论文稿件。1843 年 9 月，他向巴黎科学院宣布，他在伽罗华的工作中发现了深刻的成果，并承诺将伽罗华的论文连同他自己的评论一起发表。1846 年，他在《纯粹与应用数学杂志》上发表了这项工作，让伽罗华的工作引起了广泛关注并产生了重大影响。然而，不太清楚为什么他拖延了三年才发表这篇论文，而且没有附上自己的评论。不过，他确实在其他地方写过一篇评论，并填补了伽罗华证明中的不足之处。此外，刘维尔还讲授过伽罗华的工作，据说塞雷特以及约瑟夫·伯特兰（Joseph L. F. Bertrand, 1822-1900）和查尔斯·埃尔米特（Charles Hermite, 1822-1901）都修读或接触过他的这门课程。这样，刘维尔实质上参与了推动近世代数学和群论发展的早期工作。

1844-1851 年间，刘维尔在数论领域撰写了 18 篇系列注记和近 200 篇短篇注记，研究费马猜想、二次互反律和许多其他主题，例如揭示特定形式的素数及其乘积的某些性质以及通过二次形式确定任意整数的不同表示。刘维尔最重要的一个贡献是引进了超越数。刘维尔的兴趣源自阅读普鲁士裔数学家克里斯蒂安·哥德巴赫（Christian Goldbach, 1690-1764）和荷兰裔瑞士数学家丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli, 1700-1782）之间的通信。1844 年，刘维尔证明了超越数的存在，并利用连分数构造了无限个这样的数类。1851 年，他发表了关于超越数的新成果，消除了对连分数的依赖。他特别给出了一个有趣的超越数例子，后来被称为“刘维尔数”：

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.11000100000000000000000010000\ldots$$

刘维尔一生发表了 400 多篇论文，其中除数学论文之外还包括少量涉及热学、电学、天体力学和理论力学等问题的文章。

最后，我们试图对刘维尔做出某些公正的历史评价：刘维尔在很大程度上引进或预示了一些通常被归功于后人的重要概念，例如他关于微分方程系统稳定性的基本概念和结果，在 40 年后被法国数学家亨利·庞加莱（Jules Henri Poincaré, 1854-1912）和俄国数学家亚历山大·李亚普诺夫（Aleksandr M. Lyapunov, 1857-1918）独立地重新发现；他在首次发表的常微分方程解的存在性证明中，已经使用了后来被归功于法国数学家埃米尔·皮卡（Charles Émile Picard, 1856-1941）的逐次逼近法。

Studies
in the History of Mathematics and
Physical Sciences 15

JESPER LÜTZEN

JOSEPH
LIOUVILLE
1809–1882
MASTER OF PURE
AND APPLIED
MATHEMATICS



Springer-Verlag

图 3 约瑟夫·刘维尔传记