

KAM 定理中的 M——尤尔根·莫泽

陈关荣

(香港城市大学)

我在几篇介绍混沌 (chaos) 理论的科普文章里都提到 KAM 定理, 那是 20 世纪 60 年代初由苏联数学家安德雷·柯尔莫哥洛夫 (Andrey N. Kolmogorov, 1903 年–1987 年) 和他的学生弗拉基米尔·阿诺德 (Vladimir I. Arnold, 1937 年–2010 年) 以及美国数学家尤尔根·莫泽 (Jürgen K. Moser, 1928 年–1999 年) 共同建立的, 该理论为哈密顿 (Hamilton) 系统的稳定性奠定了理论基础, 指出微小扰动下可积系统的环面只会变形而不会消失, 但若遭受破坏则有可能导致混沌。

在这三位世界顶尖的数学家中, 前两位在学术界里家喻户晓, 然而第三位的生平和贡献却鲜为人知, 实为憾事。



图 1 尤尔根·莫泽

【一】生平简介

尤尔根·莫泽的父亲库尔特·莫泽 (Kurt E. Moser, 1895 年–1982 年) 是个神经科学家, 母亲名叫伊尔塞·斯特雷尔克 (Ilse Strehlike, 1902 年–1994 年)。莫泽的祖母在 17 世纪时从法国移民到普鲁士 (Prussia), 莫泽于 1928 年 7 月 4 日出生在普鲁士的哥尼斯堡 (Königsberg)。

名城哥尼斯堡在历史上先后是条顿骑士团国、普鲁士公国和东普鲁士国的首府，在第二次世界大战之后归属于俄罗斯并被改名为加里宁格勒（Kaliningrad）。哥尼斯堡历史不长、领域不大，但是地灵人杰、明星众多。在哥尼斯堡出生、长大的著名人物至少有“一、二、三”，即一位哲学家伊曼努尔·康德（Immanuel Kant, 1724年—1804年）、二位物理学家古斯塔夫·基尔霍夫（Gustav R. Kirchhoff, 1824年—1887年）和阿诺德·索末菲（Arnold J. W. Sommerfeld, 1868年—1951年），以及三位数学家克里斯蒂安·哥德巴赫（Christian Goldbach, 1690年—1764年）、大卫·希尔伯特（David Hilbert, 1862年—1943年）和赫尔曼·闵可夫斯基（Hermann Minkowski, 1864年—1909年）。此外，在哥尼斯堡出生的杰出数学家还有鲁道夫·李普希兹（Rudolf O. S. Lipschitz, 1832年—1903年）、卡尔·诺伊曼（Carl G. Neumann, 1832年—1925年）、阿尔弗雷德·克莱布什（Alfred Clebsch, 1833年—1872年）、约翰·赫尔墨斯（Johann G. Hermes, 1846年—1912年）和库尔特·亨塞尔（Kurt Hensel, 1861年—1941年），尚未计及毕生在哥尼斯堡工作生活的知名数学家卡尔·雅可比（Carl G. J. Jacobi, 1804年—1851年）以及在化学、生物学、文学、历史、政治、宗教、音乐、艺术等领域的名家。

当然，哥尼斯堡最广为人知的是它的“七桥问题”：流经哥尼斯堡市区有一条名为 Pregel 的小河，河中有一个小岛，河上有七座小桥。在 18 世纪，当地居民聊天时会互相挑战，是否有人可以从河畔某一个地点出发，不重复也不遗漏地走过所有七条小桥，最后回到起点？这个有趣的七桥问题在民间流传开来后，引起了身在俄罗斯圣彼得堡的瑞士裔年轻数学家欧拉（Leonhard P. Euler, 1707年—1783年）的兴趣，让他认真地去思考这个路径游戏问题。欧拉把这幅“地面—小河—小桥”的地图表达成“节点—连边”的数学图，然后证明了：这个哥尼斯堡七桥问题是无解的。欧拉以之为起点，开创了一个全新的数学分支——图论。



图 2 少年莫泽（1947 年）

现在回来继续介绍在哥尼斯堡出生长大的数学家莫泽。

二战后期，莫泽就读于哥尼斯堡一所偏重自然科学和数学教育的 Wilhelms 中学，那是希尔伯特于 1880 年毕业的地方。1945 年初，苏联军队围攻被纳粹占领的哥尼斯堡。当年，莫泽和同班男生都被纳粹押去打仗，抵御苏军。战争持续了两个月，班上除了莫泽和两个男生之外，其余的人包括莫泽的哥哥弗里德里希·莫泽（Friedrich R. E. Moser, 1925 年–1945 年）全部阵亡。莫泽试图偷越边境进入俄占区与父母团聚，但被抓获送进了监狱。他被关押不久成功逃脱跑到了俄占区，但在那里申请大学被拒。于是他再次冒险越境逃离了俄占区，并于二战结束后随父母迁居到东德的 Stralsund。

1947 年，莫泽进入了哥廷根（Göttingen）大学。他选择了数学专业，因为一直很喜欢这门学科，尽管没有接受过正规数学训练。不过，他还是做了准备的：在战争时期他始终坚持阅读，闲时通过回忆构思一些数学问题，然后自己求证求解。

莫泽来到哥廷根大学后，奥地利-德国数学家弗朗茨·雷利希（Franz Rellich, 1906 年–1955 年）教授欣赏他的数学才能，接纳了他当学生。在雷利希的指导下，莫泽开始学习微分方程的谱理论。在那里，雷利希与德国物理学家维尔纳·海森堡（Werner Heisenberg, 1901 年–1976 年）共同举办了一系列的数学和物理研讨会，让莫泽对物理学特别是量子场论产生了极大兴趣。

二战期间，德国数学家理查德·柯朗（Richard Courant, 1888 年–1972 年）因忍受不了纳粹政府对犹太人的迫害于 1933 年离开哥廷根大学数学研究所，移居到英国剑桥，翌年接受纽约大学教授职位到了美国。在纽约大学，他创建了一个新的数学与力学研究所，即后来的“柯朗数学科学研究所”。1940 年，哥廷根大学的另一位德国数学家卡尔·西格尔（Carl Siegel, 1896 年–1981 年）也因为憎恨纳粹政权逃离了德国，加盟美国普林斯顿高等研究院。1951 年，西格尔返回哥廷根大学任教，同时保留了纽约大学一个兼职教授位置。

在哥廷根大学，莫泽师从西格尔学习数论和天体力学。在两位导师联合指导下，莫泽于 1952 年完成了毕业论文“二阶常微分方程连续谱的扰动理论”，获得哥廷根大学博士学位。作为后话，莫泽在哥廷根大学修读西格尔天体力学课程时写下的详尽课堂笔记成为西格尔 1956 年《天体力学讲义》的初稿。该书在 1971 年经修订后以两人名义合著再版。

1953 年，莫泽获得 Fulbright 奖学金到美国纽约大学访问一年。在那里，他爱上了柯朗的女儿格特璐蒂·柯朗（Gertrude Courant, 1923 年–2014 年）。但是，他答应过西格尔在纽约大学访问一年后回去给他当助手，因此 1954–1955 年莫泽回到了哥廷根大学工作。1955 年，他再次前往纽约大学任职研究员与助理教授，并和格特璐蒂结婚。他俩养育了两个女儿，Nina 和 Lucy。大女儿后来是西雅图的一名戏剧和电影设计师，小女儿于 1987 年在瑞士日内瓦大学获得数学博士学位，并于 1998 年成为法国 Bourgogne 大学教授。

1957年，麻省理工学院数学系的主要成员、美国数学家诺曼·莱文森（Norman Levinson, 1912年–1975年）向莫泽提供了一个副教授职位。于是莫泽前往任职。1960年，莫泽重返纽约大学，成为柯朗数学科学研究所的教授。1960–1967年间，他曾兼任IBM顾问。1967–1970年，他担任柯朗数学科学研究所所长，并在那里任教至1980年。时为莫泽同事的匈牙利裔美国数学家彼得·拉克斯（Peter Lax, 1926年–2025年）后来回忆说：“尤尔根加入我们圈子不久，我们就意识到他非常特别。他是人中之龙，是披着闪亮盔甲的骑士。他具备所有德国人的美德：勤奋努力、热爱户外活动、热爱美和音乐。”

1978年，莫泽意外收到瑞士苏黎世联邦理工学院（ETH）的教授职位邀请。尽管他很感兴趣，但却回复说在女儿们两年后大学毕业之前不会考虑离开美国。1980年，他再次收到邀请，便接受了该职位。莫泽来到ETH之后重建了该校的数学研究所并担任所长至1995年。那时他67岁，到了学校的强制退休年龄，于是正式退休。1996年，他成为德国马克斯·普朗克数学研究所荣誉成员。

1999年12月21日星期二，美国《纽约时报》刊登了一则讣告：“世界顶尖数学家之一的尤尔根·莫泽（Jurgen Moser）于上周五在瑞士苏黎世Schwerzenbach的一家医院因前列腺癌去世，享年71岁。他曾参与发展影响深远的理论，可用于分析行星、小行星和其他天体的轨道。”

【二】数学贡献

莫泽在天体力学、动力系统、偏微分方程、非线性泛函分析、微分几何和复几何以及变分法等广泛的研究领域做出了许多深刻而重要的贡献。他是为数不多能够洞察数学全貌的行家之一，而且他非常清楚数学与其他科学分支的联系。他的研究成果对数学、天文学和物理学都产生了深远的影响。

莫泽于1952年在德国哥廷根大学取得博士学位，1953年到美国纽约大学访问一年。1954–1955年，他回到哥廷根大学工作。1955年，他再次来到纽约大学任职研究员和助理教授，同年到麻省理工学院任职副教授。在那段时间里，莫泽主要从事动力系统研究，尤其关注天体力学，特别是保面积映射的不动点稳定性问题。期间，莫泽收到《数学评论》期刊的邀请，评阅一篇已发表的演讲稿，是著名苏联数学家柯尔莫哥洛夫于1954年在荷兰阿姆斯特丹国际数学家大会闭幕式上的主题报告。该文探讨了近可积哈密顿系统拟周期解的存在性和稳定性并试图用以解释浮点运算中观察不到的混沌现象。反复阅读之后，莫泽始终无法理解文章中关于收敛性证明的关键环节。他专门查阅了柯尔莫哥洛夫在俄文版《科学》期刊上发表的证明纲要，也看不到关于收敛性的论证。于是，莫泽写信给柯尔莫哥洛夫咨询，但没有收到回复。事实上，该定理的证明后来由柯尔莫哥洛夫的学生阿诺德补充了许多细节。莫泽并不怀疑柯尔莫哥洛

夫确实有一个证明，但因为没有看到，他便尝试作出了自己的证明。此事行文至此，稍后再回来继续把故事讲完。

在麻省理工学院，对莫泽有重要影响的一个人是美国数学家约翰·纳什（John F. Nash Jr., 1928年–2015年）。当时纳什痴迷于拟线性椭圆型和抛物型偏微分方程弱解的正则性问题研究并证明了一个著名的嵌入定理。20世纪50年代末，意大利数学家恩尼奥·德·乔治（Ennio De Giorgi, 1928年–1996年）和纳什各自独立地建立了二阶椭圆型和抛物型偏微分方程的基本椭圆正则性理论。1959年，在与纳什交流讨论的过程中，莫泽发展了一种处理椭圆型偏微分方程的有效迭代方法，利用方程的弱形式来获得其弱解的估计。他的方法被称为莫泽迭代方法，是证明正则性的有力工具，还可以应用于黎曼流形上的调和映射。

1960年，莫泽回到纽约大学在柯朗数学科学研究所任职教授。期间，他主要研究偏微分方程的拟周期解，其研究成果对后续椭圆型和抛物型偏微分方程正则性理论的发展产生了重大影响。特别是，他提出了一种新的方法来研究德·乔治和纳什的正则性理论，并将他们的结果推广到非常一般的Harnack型二阶方程解的不等式。这一成果让莫泽在国际数学界声名鹊起。

1962年，莫泽研究了将一个圆环映射到自身的扭曲映射，证明了一条扭曲定理。受到柯尔莫哥洛夫工作的启发，他利用美国数学家乔治·伯克霍夫（George D Birkhoff, 1884年–1944年）的范式定理以及纳什最初为解决等距嵌入问题而发展的一种非常精妙的解析技巧，证明了环带保面积变换中不变曲线的存在性以及几乎完全可积的哈密顿系统准周期解的存在性。此外，他还给出了纳什嵌入定理的新证明。

1963年9月，莫泽到莫斯科访问柯尔莫哥洛夫和阿诺德，同时见到了许多在动力系统和偏微分方程领域的杰出苏联青年数学家。前面说到，柯尔莫哥洛夫1954年在世界数学家大会闭幕式报告中不加证明地叙述了一个可积哈密顿系统在微小光滑扰动下不变环面的存在性定理。后来，该定理后由阿诺德补充了许多细节。由于莫泽的加入，三人共同完善了全部严格证明，建立了著名的KAM定理。

KAM理论在某种意义上解决了太阳系稳定性问题。它表明：由于行星之间的引力摄动很小，太阳系在概率意义上是稳定的；也就是说，即使存在混沌区域，一个初始状态随机的行星，其轨道极有可能落在某个KAM环面上，因此其运动是长期稳定的。KAM理论还架起了规则性与混沌性之间的桥梁，它是第一个深刻揭示规则运动和混沌运动如何在一个系统中共存的数学理论，促进了后人对混沌理论和遍历理论的深入研究。

1965年，莫泽证明了微分几何中被称为莫泽体积定理的重要结果：在紧致可定向流形上，两个具有相同总体积的体积形式在微分同胚意义下等价。他还将该技巧应用于辛形式，证明了上同调的辛形式族通过微分同胚相互关联，进而建立了一条莫泽稳定性定理。

20 世纪初，法国数学家昂利·庞加莱（J. Henri Poincaré, 1854 年–1912 年）和埃利·嘉当（Élie J. Cartan, 1869 年–1951 年）深入研究了柯西–黎曼（Cauchy–Riemann）几何中四维光滑流形上的三维超曲面。莫泽与陈省身合作，将庞加莱和嘉当的工作推广到任意维度。他们的工作对柯西-黎曼几何后来的发展产生了重大影响。

此外，莫塞在非线形分析中也颇有成就。他在天体力学、薛定谔方程的谱理论、KdV 方程、极小曲面理论、微分几何叶状结构理论以及非线性动力系统等多方面都获得重要成果。

莫泽出版了多部著作，除了前面提到的与西格尔合著的《天体力学讲义》（1971 年）之外，还有《哈密顿系统讲义》（1968 年）、《动力系统中的稳定及随机运动》（1973 年）、《动力系统讲义》（1978 年）、《可积哈密顿系统和谱理论》（1983 年）、《变分法选集》（2003 年）。

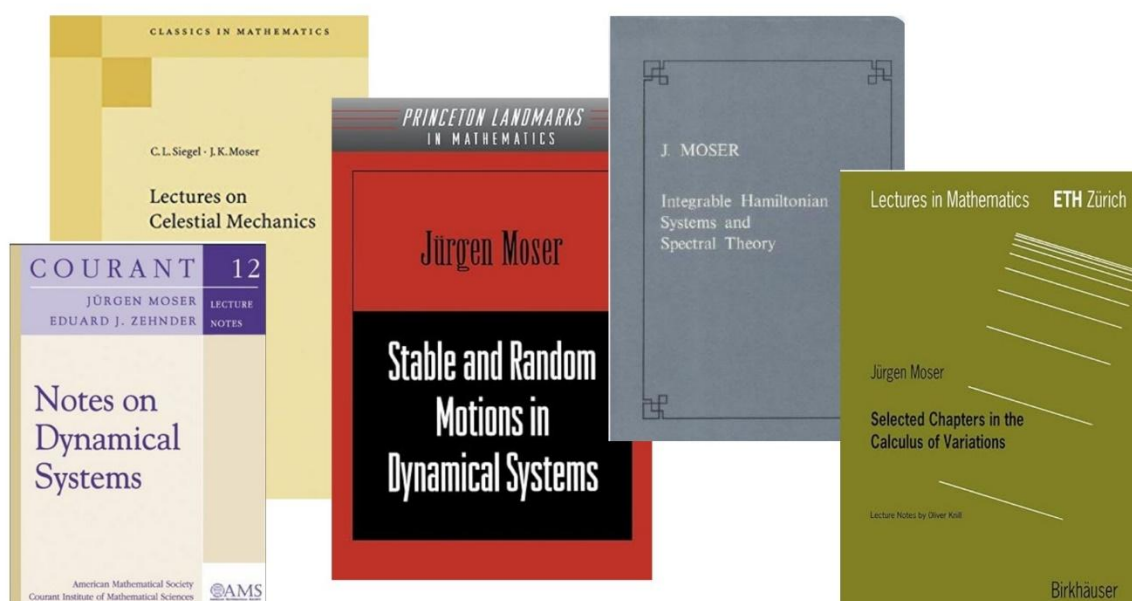


图 3 莫泽著作选示

【三】学术荣誉

莫泽获得许多荣誉和奖励，表列如下：

1967 年，美国国家科学院 Watson 奖章。

1968 年，美国数学会–工业与应用数学学会首届 Birkhoff 应用数学奖。

1971 年，当选为美国国家科学院院士。

1983年，当选为法国科学院外籍院士。

1983–1986年，担任国际数学家联盟（IMU）主席。

1984年，荷兰数学会 Brouwer 奖章。

1988年，巴西 Rio 纯粹与应用数学研究所（IMPA）荣誉教授。

1992年，德国数学会 Cantor 奖章。

1994-95年，沃尔夫数学奖：“表彰其在哈密顿力学稳定性方面的基础性工作以及对非线性微分方程的深刻而有影响力的贡献”。

1996年，当选为英国伦敦数学会院士。

1997年，当选为俄国科学院外籍院士。

莫泽分别于 1962 年、1978 年、1998 年三次在国际数学家大会上作大会报告。他曾应邀于 1973 年作美国数学会的 Gibbs 讲座，1975 年作瑞士苏黎世 ETH 的 Pauli 讲座，1976 年作意大利 Lincei 科学院的 Hermann Weyl 讲座，1977 年作剑桥大学的 Hardy 讲座，1981 年作意大利罗马的 Fermi 讲座，以及 1984 年作美国工业与应用数学学会的 John von Neumann 讲座。

2000 年，美国工业与应用数学学会设立了“尤尔根·莫泽讲座”，旨在嘉奖在非线科学领域做出杰出贡献的个人。

【四】后人怀念

莫泽一生热爱音乐，会演奏大提琴，业余时间经常与同事和学生一起演奏室内乐。他喜欢骑自行车、游泳和徒步。他敢于冒险，喜欢挑战自我，并且非常自信。他有一次不经意地说道：“我觉得不管是什么事，只要我想做就能做到。”事实上，他 60 岁时才开始参加高空滑翔伞运动。学生们回忆起莫泽，都称赞他待学生如家人，称赞他能够将数学与运动、音乐和交谈融合一起。朋友间流传的轶事中不乏褒奖，夸赞他的热情、无畏和好奇心。

对于名城哥尼斯堡来说，莫泽是继哥德巴赫、希尔伯特和闵可夫斯基等数学大师之后的一位杰出数学家。