她是“20世纪最有影响的数学家”之一

陈关荣

2022年7月6–14日，世界数学家大会将在全球线上召开，届时有一次隆重的学术活动以纪念圣彼得堡国立大学的校友、数学家奥尔加·拉德任斯卡娅（Olga A. Ladyzhenskaya，1922-2004）的100周年诞辰，同时颁发第一枚“拉德任斯卡娅数学物理奖章”（Ladyzhenskaya Medal in Mathematical Physics）。国际数学联盟（International Mathematics Union）这则消息的发布，重新唤起了人们对这位曾经被选为“20世纪最有影响的数学家”之一的女数学家的记忆和怀念。

图1 奥尔加·亚力山德罗芙娜·拉德任斯卡娅（Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya，1922-2004）

一 生平与经历

奥尔加于1922年3月7日出生在俄罗斯北部的一个不到四千人口的小镇Kologriv，当年俄国正处在第一次世界大战后的经济萧条时期。她的父亲亚历山大（Alexander I.

Ladyzhenskaya）是当地一所中学的校长兼数学教师，母亲 Anna Mikhailovna 是个家庭主妇，奥尔加在三姐妹中排行最小，祖父根纳迪（Gennady Ladyzhensky）是个画家。

1937 年奥尔加 15 岁，父亲被 NKVD（KGB 的前身）以“国家的敌人”罪名逮捕随后枪杀，让整个家庭从此经历了长达二十年之久的艰难痛苦生涯。到 1956 年，奥尔加的父亲被完全无罪平反，家人收到的通知是“没有不法行为的证据”。那时奥尔加已经 34 岁了。

图 2 奥尔加（少年时期）

1939 年，17 岁的奥尔加以优秀成绩从 Kologriv 高中毕业，到列宁格勒（即圣彼得堡）继续求学。但是，父亲的历史问题让成绩优异的她被禁止进入已经考取的列宁格勒国立大学（即圣彼得堡国立大学）。但她还算幸运进入了波克罗夫斯基教育学院（Pokrovskii Pedagogical Institute），在那里读了两年课程，于 1941 年 6 月毕业。然后，她到了 Gorodets 镇的一所学校任教，但 1942 年又折回老家 Kologriv，在父亲生前任教的中学担任数学教师。

1943 年，经过多番周折之后，奥尔加终于进入了莫斯科国立大学数学力学系二年级就读。该校当年也叫做莫斯科国立罗蒙诺索夫（Lomonosov）大学。在那里，她获得了助学金。她的指导教授是著名的数学家伊万·彼得罗夫斯基 (Ivan G. Petrovsky，1901-1973)。彼得罗夫斯基主要从事偏微分方程研究，对希尔伯特第 19 和第 16 问题做出过重大贡献。在校期间，奥尔加经常参加伊斯拉埃尔·盖尔范德（Israel Gelfand，1913-2009）的数学讨论班。盖尔范德被认为是 20 世纪最伟大的数学家之一。在那里，她受盖尔范德和安德烈·吉洪诺夫（Andrei N. Tikhonov，1906-1993）影响甚深。

1947 年，奥尔加从莫斯科国立大学毕业。她的毕业论文解决了一类时变系数抛物型偏微分方程的求解问题，被彼得罗夫斯基推荐到《Mathamaticheskii Sbornik》发表。她毕业后和数学系同学安德烈·基谢列夫（Andrei A. Kiselev）结婚，并跟随丈夫移居到列宁格勒。在那里，她凭着莫斯科大学的强力推荐如愿以偿地进入了列宁格勒国立大学

数学力学系，师从谢尔盖•索伯列夫（Sergei L. Sobolev，1908-1989）。索伯列夫是数学分析和偏微分方程领域的著名数学家，他长期组织一个数学物理方程边值问题的讨论班系列，让列宁格勒各个高校偏微分方程理论及应用方向的师生们经常有机会聚集在一起研讨数学物理的前沿问题。在那里，奥尔加是骨干成员，后来成为组织者。之后，她一直坚持组织该讨论班系列的活动直至去世为止。在读博期间，她和著名数学家弗拉基米尔•斯米尔诺夫（Vladimir I. Smirnov，1887-1974）在流体动力学研究方面开始建立合作。

图 3 奥尔加（青年时期）

1949 年，奥尔加在列宁格勒国立大学取得博士学位，并留校在数学物理学院当讲师。在那里，她 1954 年成为副教授，1956 年升为正教授。在博士毕业论文中，她发展了线性和拟线性双曲偏微分方程组的有限差分算法，在索伯列夫空间网格上作类似于 Fourier 级数的展开，并通过对逼近误差的估计严格证明了算法在网格步长趋于零时的收敛性。后来知道，冯•诺依曼（John von Neumann，1903-1957）在美国 Los Alamos 实验室差不多同时也发展了类似的算法。奥尔加在博士论文中把有限差分法推广到其它不同类型的偏微分方程组，给出了包括时变系数情形的算法稳定性条件和证明。她还对彼得罗夫斯基关于拟线性双曲型偏微分方程组的 Cauchy 问题局部唯一解的存在性证明做了有意义的简化。

博士毕业后，奥尔加继续研究二阶线性双曲型偏微分方程组初边值问题的差分算法。她透彻地研究了一般对称二阶椭圆型偏微分方程，在有界域上定义的某类函数组成的索伯列夫空间内以特征函数作级数展开求解，发展了收敛算法，并对 Dirichlet 边值问题作了许多研究。

此外，奥尔加还研究了各种比较具体的线性和线性化偏微分方程及方程组，包括弹性力学方程、薛定谔（Schrödinger）方程、线性化纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程组和麦克斯韦（Maxwell）方程组。她在索伯列夫空间中求各种偏微分方程初边值问题弱解的思想、理论和方法对后来数学物理方程的数值算法研究产生了非常深刻的影响。

这段时间里，奥尔加的重要贡献包括几条著名的“拉德任斯卡娅不等式”：

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_1(\Omega)\,\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } n = 2$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_2(\Omega)\,\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4}} \quad \text{for } n = 3$$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_3(\Omega)\left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

其中索伯列夫空间 $W_2^2(\Omega)$中的Ω是个适当的n维有界区域，C_1, C_2, C_3 是常数，$L^2(\Omega), L^4(\Omega)$ 分别是Ω上 2 次和 4 次幂可积函数空间，$\nabla = \left(\partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$，$\Delta$ 是 Laplace 算子，而 u 是在区域边界为零的弱可微函数。她还进一步研究了二阶拟线性椭圆型和抛物型偏微分方程以及高维和非线性偏微分方程组的许多相关问题，特别是解的存在唯一性和正则性问题。

1953 年，奥尔加获得了物理与数学科学博士学位（Doctor of Physical and Mathematical Sciences），论文是关于一般二阶双曲型偏微分方程混合边值问题解的正则性。她给出了这类方程的解是经典解的严格精确条件，并论证了 Fourier 方法用于双曲型方程求解的可行性，以及 Laplace 变换方法在这类方程中的应用。1953 年，她的俄文专著《双曲方程的混合问题》（The Mixed Problem for a Hyperbolic Equation）总结了上述成果。

图 4 奥尔加（中年时期）

多年之后，1964 年奥尔加和她的学生尼娜·乌拉尔茨瓦（Nina N. Ural'tseva，1934-2012）出版了一本百科全书式的专著《线性和拟线性椭圆型方程》（Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type），该书涵盖了领域内的大部分基本成果。她俩又和另一个学生弗谢沃洛德·索隆尼科夫（Vsevolod A. Solonnikov，1933 - ）一起，出版了专著《线性和拟线性抛物型方程》（Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type）。美国著名数学家彼得·拉克斯（Peter D. Lax，1926 - ）是 2005 年阿贝尔奖（Abel Prize）得主，他评说奥尔加的这几本书“包含了许多关于椭圆型和抛物型方程解的估计的深刻结果。作者们极大地推广了伯恩施坦的思想和德·乔治、莫泽及纳什的技巧。这些书是领域内基本知识的源泉”。

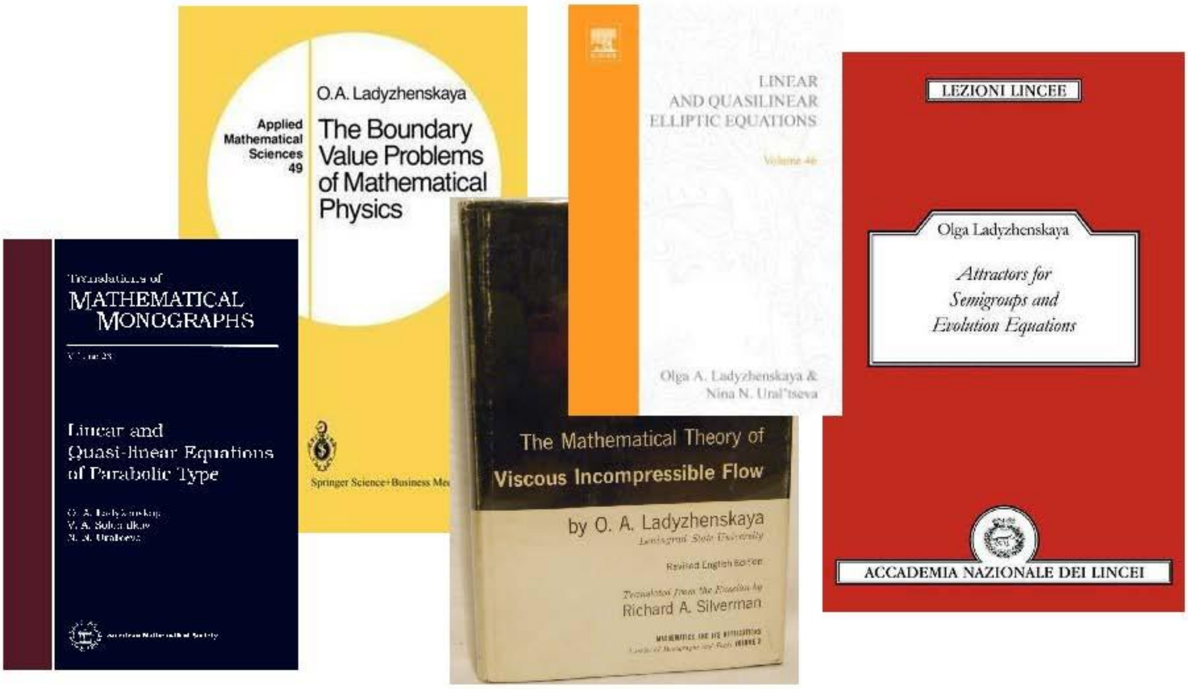

图 5 奥尔加的部分著作

二 研究与成果

奥尔加一生发表了 250 多篇论文和 7 本专著。

如上所说，她关于偏微分方程理论的研究几乎是全方位的。但她毕生的挚爱是流体动力学中的偏微分方程，特别是纳维-斯托克斯方程。

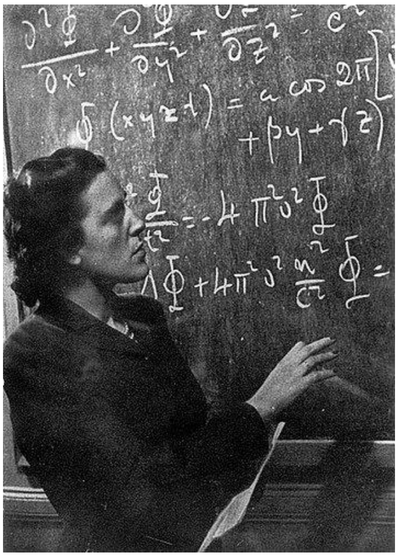

图 6 奥尔加（青壮年时期）

纳维-斯托克斯方程

1757 年，欧拉（Leonhard Euler，1707-1783）在他著名论文“流体运动的一般原理”（Principes généraux du mouvement des fluides）中建立了第一个无粘性不可压缩流的运动偏微分方程。1821 年，工程师和物理学家克劳德·纳维（Claude-Louis Navier，1785-1836）改进了欧拉的方程而建立了带有一个粘性常数不可压缩流的方程。1845 年，数学和物理学家乔治·斯托克斯（Sir George Stokes，1819-1903）作了进一步的推广，建立了带有两个粘性常数不可压缩流的方程，即著名的“纳维-斯托克斯方程”。

纳维-斯托克斯方程的研究旨在确定其初值问题是否在所有时间区间上都存在光滑解；如果没有的话，它的广义解是否由初始数据唯一确定？对于三维情形，这是一个很困难的数学问题。纳维-斯托克斯方程有物理意义的解的存在性是美国克雷数学研究所（Clay Mathematical Institute）在 2000 年 5 月 24 日公布的千禧年百万美元大奖中七个难题之一。

1950 年代初，奥尔加着手研究最简单形式的平稳斯托克斯方程

$$\left.\begin{array}{c}\alpha\Delta u-\nabla v=-f\\ \operatorname{div}\ u=0\end{array}\right\}\ in\ \Omega,\quad u|_{\partial\Omega}=0,$$

其中区域 $\Omega\subset R^n$（$n=2,3$）有边界 $\partial\Omega$，函数 $f\in L_2(\Omega;R^n)$ 为给定输入，α 为粘性常数，u 为速度场未知量，v 为压力场未知量。如果把光滑函数集合 $C_0^\infty(\Omega;R^n)$ 在索伯列夫空间 $W_2^1(\Omega)$ 中的闭包记为 $H^1(\Omega)$，则速度场可以由下面的变分方程来决定：

$$\alpha\int_\Omega \nabla u:\nabla v\,dx=\int_\Omega f\cdot v dx,\quad \forall\, v\in H^1(\Omega).$$

奥尔加证明了，在 Ω 上速度场 u 的解存在并且它的二次导数是局部平方可积的。

由于 1940-1950 年代苏联和西方世界的割裂，奥尔加并不了解法国数学家让•勒雷（Jean Leray，1906-1998）和美国数学家埃伯哈德•霍普（Eberhard F. F. Hopf，1902-1983 ）关于纳维-斯托克斯方程的重要成果。在 1950 年代期间，奥尔加独立地发表了一系列关于斯托克斯方程和纳维-斯托克斯方程的研究结果。1958 年，她在《苏联科学院学报》（Doklady Akademii Nauk SSSR）上发表了一篇十分重要的论文，证明了二维纳维-斯托克斯方程初边值问题的全局唯一可解性。而相应的 Cauchy 问题则是由勒雷解决的。同时，奥尔加还给出了纳维-斯托克斯方程的数值解法和算法收敛性证明。

奥尔加的工作在流体动力学的研究领域里引出了许多有意义的新课题。这些主要成果都总结在她非常有影响的专著《粘性不可压缩流的数学理论》（The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow）里。该书后来成为该领域内的经典。

至于三维纳维-斯托克斯方程，如上所说，属于千禧年难题，至今还没有多少结果。对此难题，奥尔加在 1967 年证明了它在勒雷-霍普意义下的弱解是光滑的。她还对三维纳维-斯托克斯方程的速度场作了些修改，并容许它在一些区域内有较大的波动。这个修改后的方程后来被称作"拉德任斯卡娅方程"。对此方程，她证明了全局唯一可解性。在 1966 年莫斯科世界数学家大会上，她应邀报告了这个漂亮的结果。

奥尔加在流体偏微分方程方面的研究工作主要受到俄罗斯数学家谢尔盖•伯恩施坦（Sergei N. Bernstein，1880-1968）、法国数学家让•勒雷和波兰数学家朱利叶斯•绍德尔（Juliusz P. Schauder，1899-1943）的影响。由于这三位数学家对希尔伯特（David Hilbert，1862-1943）第 19 问题均有不同程度的贡献，他们的工作也把奥尔加从经典偏微分方程的研究引导到希尔伯特第 19 问题中去。

图 7 奥尔加（壮年时期）

希尔伯特第 19 问题

希尔伯特在 1900 年巴黎举行的第二届世界数学家大会上作了题为"数学问题"的演讲，提出了 23 个最重要的数学问题，其中的第 19 问题是一个关于变分法极值的本质问题。希尔伯特注意到了 Laplace 方程（也叫做位势方程或调和方程）具有某种正则性从而保

证了解析解的存在性。他还注意到其他一些偏微分方程也有某种正则性从而都有解析解。他把问题描述为具有如下三个特征的变分极值问题：

（1） $\iint F(p,q,z;x,y)dxdy = min$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$；

（2） $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q}\right) > 0$；

（3） F 关于各个变量 p,q,x,y,z 都是解析函数。

1904 年，俄罗斯数学家伯恩施坦在巴黎大学的博士论文中证明了，如果上述问题在二元情况下对 $u \in \mathrm{C}^3$ 有解的话，那么 u 必定是个实解析函数。这个结果表明，关于上述方程正则性的要求包括了对 u 的解析性要求和对维数的某种约束。随后，许多数学家先后作了不少努力并对一些相关问题取得了不少成果，如放宽某些条件或在二维情形下得到较为完整的解答。

最完整的结果公认为是由意大利数学家恩尼奥·德·乔治（Ennio De Giorgi，1928-1996）和美国数学家约翰·纳什（John F. Nash Jr.，1928-2015）对三维情形做出的。德·乔治证明了具有散度形式并带可测系数的一致椭圆二阶方程的弱解是 Hölder 连续的，从而推出了关于第 19 问题正则性的解答。他的证明在 1956-1957 年间与纳什是同时但独立完成的。德·乔治直接研究偏微分方程本身，而纳什研究相应的热传导方程并得到 Hölder 估计，即证明了弱解的 Hölder 连续性。由于椭圆方程可以理解为不依赖时间的热方程，由此可推出原变分问题的正则性，即也给出了第 19 问题的解答。稍后，美籍德国数学家于尔根·莫泽（Jürgen K. Moser，1928-1999）给出了一个不同的证明。于是有了一条著名的 De Giorgi-Nash-Moser 定理。他们的结果表明，散度型椭圆方程以及半线性椭圆方程和 Laplace 方程一样，都具有正则性。至此，希尔伯特第 19 问题被认为是完全解决了。

接下来，不少数学家还致力于一些推广性研究。奥尔加则发展了德·乔治和纳什的理论，和合作者一起在 1960 年代完整地解决了一大类椭圆型及抛物型偏微分方程的希尔伯特第 19 问题。在这些结果的基础上，后人还将希尔伯特第 19、20 及 23 问题整合在一起，把数学问题和结果作了相当程度的推广。

顺便提及，2015 年纳什因在非线性偏微分方程方面的贡献而荣获阿贝尔奖。当然，他 1994 年因为博弈论方面的贡献而荣获诺贝尔经济学奖是广为人知的。而让他更广为人知的主要原因还应归功于 2001 年以他为主角原型的大众化电影《美丽心灵》。

图 8 奥尔加（老年时期）

耗散偏微分方程吸引子理论

奥尔加研究二维纳维-斯托克斯方程初边值问题时导出了半群的概念并发展了相应的一些技巧。她证明了，方程的解算子在相空间中对应于每个固定的时刻都是个紧算子。这个结论对于有限维相空间是容易建立的。她接下来对无穷多个有限维数逐渐增大的相空间取交集，然后证明了其交集非空、紧致、并对相邻有界子集具有某种吸引性。她把这个极限集称为全局最小吸引子（global minimal attractor）。她还发现了这个交集的许多有趣特性，诸如某些不变性和耗散性，以及时间向负方向的可逆性，特别是对相关抛物型方程作了推广。她的研究开辟了偏微分方程的一个全新方向，即大范围稳定性理论（stability in the large）以及偏微分方程的吸引子理论。她建立了算子半群和二维纳维-斯托克斯方程的联系并给出了吸引子 Hausdorff 维数和分数维数的精确估计。这些成果总结在她1988年出版的专著《半群的吸引子和演化方程》（Attractors for Semigroups and Evolution Equations）里。

图 9 奥尔加（79 岁，圣彼得堡家中）

三 奖励与荣誉

奥尔加的学术生涯，从 1954 年起成为俄罗斯科学院 Steklov 数学研究所（LOMI）的核心成员，到 1961 年被选为所长。1959-1965 年以及 1970-1990 年，她被选为列宁格勒数学会副主席，1990-1998 出任主席，成为欧拉多年后的一位女继承者。在那里，她数十年如一日地组织偏微分方程讨论班，不断地跟踪国际数学研究的进展。当年，她的讨论班系列在苏联很有名气，对微分方程的研究和发展产生过非常重大的影响。

1958 年，奥尔加被提名菲尔兹奖（Fields Medal）并成为候选人之一，可惜没有成功。

1959 年，她荣获列宁格勒国立大学科学一等奖。

1969 年，她荣获俄罗斯科学院帕夫努蒂•切比雪夫奖（Pafnuty L. Chebyshev Prize）并荣膺国家勋章。

1981 年，她被选为俄罗斯科学院准院士（Corresponding Member）。

1985 年，她获选为德国利奥波第那科学院（Deutsche Akademie Leopoldina）外籍院士。利奥波第那科学院成立于 1652 年，其后三百多年德国都没有全国性的科学院。到 2007 年 11 月，利奥波第那科学院才升格为德国国家级的科学院。

1989 年，她获选为意大利国家科学院（Accademia Nazionale dei Lincei）外籍院士。这是一个 1603 年成立的国家级的科学院和科技研究机构。

1990 年，奥尔加晋升为俄罗斯科学院院士（Full Member）。

1992 年，她荣获德国洪堡基金会颁发的索菲亚•柯瓦列夫斯卡娅奖（Sofia V. Kovalevskaya Prize）。

1994 年，她应邀在国际数学联盟做了著名的 Noether Lecture 演讲。

1998 年，她应邀在 SIAM 年会上做了著名的 John von Neumann Lecture 演讲。

2001 年，她被遴选为美国艺术与科学院外籍院士。

2002 年，她荣获俄罗斯科学院的米哈伊尔•罗蒙诺索夫金质奖章（Great Gold Lomonosov Medal）。

2002 年， 她获德国波恩大学授予荣誉博士学位。

2003 年，她荣获俄罗斯科学院的亚伯兰•约夫物理科学奖章（Abram F. Ioffe Medal）和圣彼得堡国立大学勋章。

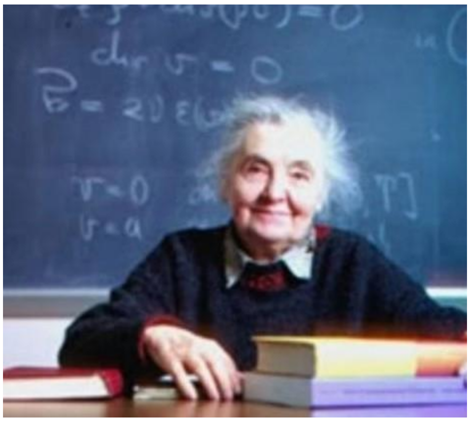

图 10 奥尔加（晚年时期）

四 晚年与结局

奥尔加年轻时就立志把自己的一生奉献给数学。为此，她还决定不生小孩。为了这件事，她和丈夫长时间里意见不能统一。结果两人没有留下后代，而且奥尔加自己一个人过完了后半生。不过奥尔加完全不是一个无情无义的工作狂。她一生热爱艺术，喜欢讲故事，还经常参加社会慈善服务工作。她深得朋友和同事们的尊重和爱戴。

由于父亲历史问题的缘故，奥尔加本人到 1988 年 66 岁之后才被允许出国参加学术会议。这些痛苦的经历自然影响到她的政治观点。她明确地支持当年的一些政治异见人士，包括著名作家、诺贝尔文学奖获得者、俄罗斯科学院院士亚历山大•索尔仁尼琴（Aleksandr Solzhenitsyn，1918-2008）和著名女诗人、牛津大学名誉文学博士安娜•戈连科（Anna A. Gorenko，1889-1966；笔名安娜•阿赫玛托娃，Anna Akhmatova）。

奥尔加晚年遭受严重眼疾的困扰，需要用特制带光的铅笔才能看清楚自己写的字。2004 年初，她计划去美国佛罗里达州参加一个学术会议，为之开始准备一篇水力学分析的论文。可是就在启程前两天的 1 月 12 日，她不知不觉地在睡梦中安然辞世，享年 82 岁。

奥尔加的名字被铭刻在波士顿科学博物馆内“20 世纪最有影响的数学家”的一块大理石板上。

2022 年 7 月 6–14 日，世界数学家大会将举办纪念奥尔加 100 周年诞辰的学术活动。为此，大会的组织委员会和俄罗斯国家数学会以及圣彼得堡国立大学还联合颁发一个新的奖项：“奥尔加•拉德任斯卡娅奖章”（Olga A. Ladyzhenskaya Medal），奖金为一百万卢布。之后，该奖项在每届世界数学家大会上隆重颁发，奖励数学物理领域（包括量子场论和统计物理）中有杰出贡献的数学家和物理学家。

图 11 “奥尔加·拉德任斯卡娅奖章”盒（2022）