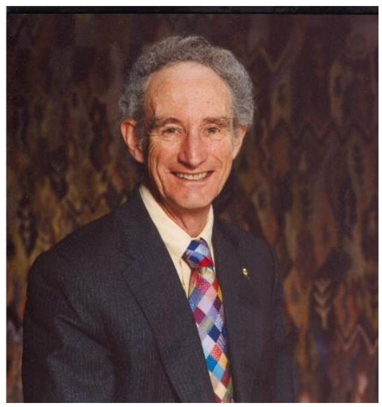
離散混沌傳奇

陳關榮

羅伯特·梅（Robert McCredie May，1936-2020）無疑是傳奇式人物中的傳奇。



Sir Robert M. May(1936-2020)

羅伯特，昵稱 Bob，因老年癡呆症併發肺炎於 2020 年 4 月 28 日在英國牛津養老院離世，享年 84 歲。

9 月 24 日，美國生態學會會刊（Bulletin of the Ecological Society of America）在線發表了普林斯頓大學幾位生態學家的紀念文章，開篇讚評便說：“如果能夠擁有一個精彩的職業人生，我們絕大多數人都會感到無比榮幸，而 Bob 至少有五個。”

雖然這句話意指羅伯特·梅的科學人生經歷了至少五個輝煌的階段，他確實也是一位成績卓越、五位一體的學者：理論物理學家、應用數學家、數學生態學家、數值傳染病學家和複雜性科學家。他是英國最有影響的科學家之一，在生物多樣性、群體動力學和流行病學方面都做出了奠基性的貢獻，成就斐然。

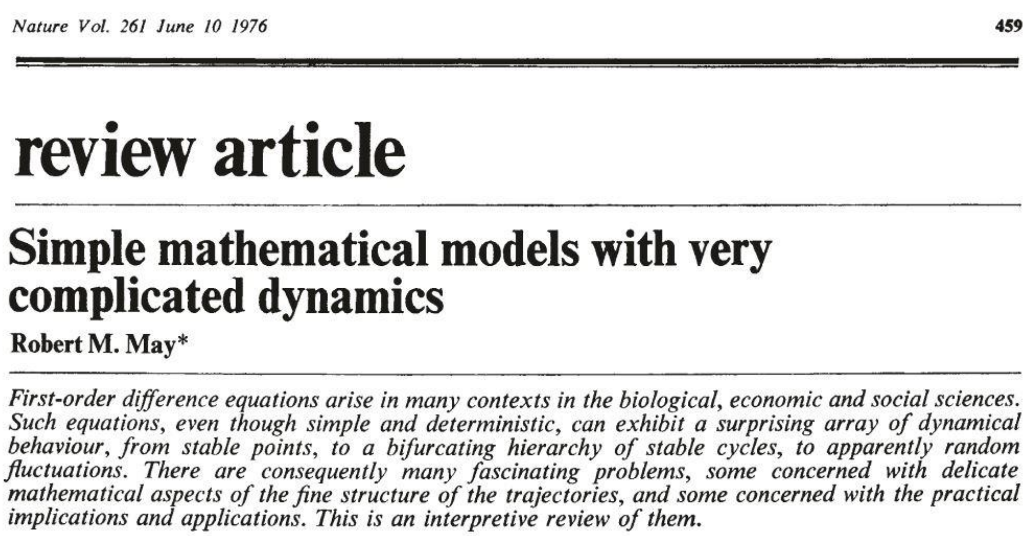
談到學術成就，不知從什麼時候開始大家習慣了用一把可以計量的尺子去量度一下：發幾篇 SNC 了？戴幾頂帽子了？得多少個大獎了？當然，對於這些，羅伯特·梅的回答完全不是一個問題。

記錄表明，學者羅伯特·梅一生發了 224 篇《Nature》和 59 篇《Science》，其中有許多科學論文也有不少學術評論。他的 h 指數為 177，還在增長中的引用總數超過 166,000。

記錄也表明，名冠爵士和牛津男爵的羅伯特• 梅是前英國政府首席科學顧問（1995-2000）、英國皇家學會院士和前主席（2000-2005）、英國皇家工程院、美國科學院、澳大利亞科學院、歐洲科學院（Academia Europaea）等多個國家和地區科學院院士，並且榮膺普林斯頓、耶魯、悉尼、ETH、牛津、哈佛等多所名校的榮譽博士學位。他還曾任 1913 年成立的英國生態學會主席（1992-1993）、普林斯頓大學學術委員會主席（1977-1988）以及聖塔菲研究所科學委員會主席，等等。

記錄還表明，科學家羅伯特• 梅獲獎無數。代表性的有英國皇家學會 Copley Medal（2007）、日本Blue Planet Prize（2001）、瑞士--義大利Balzan Prize（1998）、瑞典皇家科學院Crafoord Prize（1996）、美國生態學會MacArthur Prize（1984）等重大獎項。其中英國皇家學會Copley Medal是世界上最古老最著名的科學獎，始於1731年，獲獎者包括眾所周知的富蘭克林、哈密頓、高斯、法拉第、亥姆霍茲、吉布斯、門捷列夫、盧瑟福、愛因斯坦、普朗克、波恩、哈代、狄拉克、霍金、希格斯等等。而瑞典皇家科學院的Crafoord Prize在1983年授予混沌學先驅愛德華•洛倫茨（Edward N. Lorenz）。

其實羅伯特• 梅在學術界裡更廣為人知的是他的科學貢獻：他和Roy M. Anderson合著、在1992年由牛津大學出版社出版的近800頁的專著《Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control》，是傳染病數學模型和分析的聖經，至今獲得37,000多次引用，其中引進並研究了今天熟知的傳播因子即再生數，用以界定疾病傳播的收斂和發散速度，並且建立了早期的 HIV 傳染病傳播數學模型。他自己寫的一本著作《Stability and Complexity in Model Ecosystems》在1973年由普林斯頓大學出版社出版後2001年再版，至今獲得 9,000 多次引用。他關於動物捕食模型的 May-Wigner 穩定性定理在該研究領域中特別有名。而他畢生備受關注的論文則是 1976 年在《Nature》上發表的題為“Simple mathematical models with very complicated dynamics”的論文（Nature, 261: 459-467, 1976），至今被引7,800多次。這是一篇里程碑式的論文，背後有許多故事。


Nature Vol. 261 June 10 1976 459

review article

Simple mathematical models with very complicated dynamics

Robert M. May*

First-order difference equations arise in many contexts in the biological, economic and social sciences. Such equations, even though simple and deterministic, can exhibit a surprising array of dynamical behaviour, from stable points, to a bifurcating hierarchy of stable cycles, to apparently random fluctuations. There are consequently many fascinating problems, some concerned with delicate mathematical aspects of the fine structure of the trajectories, and some concerned with the practical implications and applications. This is an interpretive review of them.

圖 2：羅伯特• 梅引進 Logistic 映射的里程碑論文

羅伯特• 梅自稱是個“r -選擇型科學家”，喜歡做“簡單優雅而又重要的研究”。這裡“r -選擇型”是生態學裡的行話，指受自身生物潛能（最大生殖能力，r）支配的物種。

1970 年代，羅伯特• 梅在普林斯頓大學任職生態和動物學教授。他孜孜不倦地研究生態系統中的動物捕食模型以及物種生存競爭和演化問題。他注意到了比利時數學家 Pierre Verhulst 在 1845-1847 年期間建立的描述人口數目變化的連續時間 Logistic 方程。這裡的單詞 Logistic 來自法文 logistique，描述部隊的後勤供需及宿營管理。羅伯特• 梅把它離散化，獲得了“Logistic 映射”，即從第 k 步到第 $k+1$ 步的疊代運算公式如下：

$$x(k+1)=\lambda\, x(k)[1-x(k)], \qquad k=0,1,2,\dots$$

式中 $x(k)$ 為離散實數變量，表示第 k 年的動物個體數量（標準化後取值在 0 和 1 之間），初始值 $x(0)\in(0,1)$，實參數 $\lambda\in(0,4)$ 代表生死變化率。這個數學公式的意思不難理解：當個體數量少（即$x(k)$小）的時候，下一年的數量增長大體上是個常數；當個體數量增加（即$x(k)$變大）時，外界資源比如食物不夠了，個體的數量便會減少。

由於這個函數曲線在定義區間上是一條拋物線，祇有一個峰值，故此也稱為“單峰函數”。羅伯特• 梅用它來描述一般生物、經濟或社會的演化，例如動物或昆蟲的捕食和繁衍。後人則把它類比於“人口”數量的漲落，稱之為“蟲口”模型。

這個數學映射非常神奇有趣。雖然數學公式看上去很簡單，但是它描述的動力學行為卻異常複雜。

首先，這個疊代運算公式的計算過程可以理解如下：從任意一個初始值 $x(0)\in(0,1)$ 開始，代入右邊便得到左邊的值 $x(1)$。然後把這個 $x(1)$ 代入右邊便得到左邊的值 $x(2)$。如此周而復始，可不斷地計算下去。

容易看出，當 $\lambda=2$ 時，如果 $x(0)=0.5$ 則所有後面的 $x(k)\equiv 0.5$，$k=1,\ 2,\ 3,\ \dots$。也就是說，我們獲得了一個無窮序列 $\{0.5,0.5,0.5,\dots\}$ 的解，稱為週期為 1 的週期解。

然後，作為簡單粗略的解釋，當 $\lambda=3.3$ 時，如果從 $x(0)=0.479$ 開始，每一步計算都作四捨五入祇保留三位小數，則有

$$x(1)=3.3\times 0.479(1-0.479)=0.824$$
$$x(2)=3.3\times 0.824(1-0.824)=0.479$$
$$x(3)=3.3\times 0.479(1-0.479)=0.824$$
$$x(4)=3.3\times 0.824(1-0.824)=0.479$$
$$x(5)=3.3\times 0.479(1-0.479)=0.824$$
$$x(6)=3.3\times 0.824(1-0.824)=0.479$$
$$\cdots\cdots$$

由此我們獲得了一個無窮序列 $\{0.479,0.824,0.479,0.824,\ \dots\}$，是週期為 2 的週期解。

現在，我們一方面可以把這兩個週期 1 和週期 2 的解在圖紙上分別打上一個點和兩個點，另一方面可以繼續把所有不同參數值 $\lambda \in (0,4)$ 和所有對應不同初始值 $x(0) \in (0,1)$ 都算一遍，並把得到的解序列分別在同一張圖上打上對應的點，便會得到圖 3 所示的曲線。

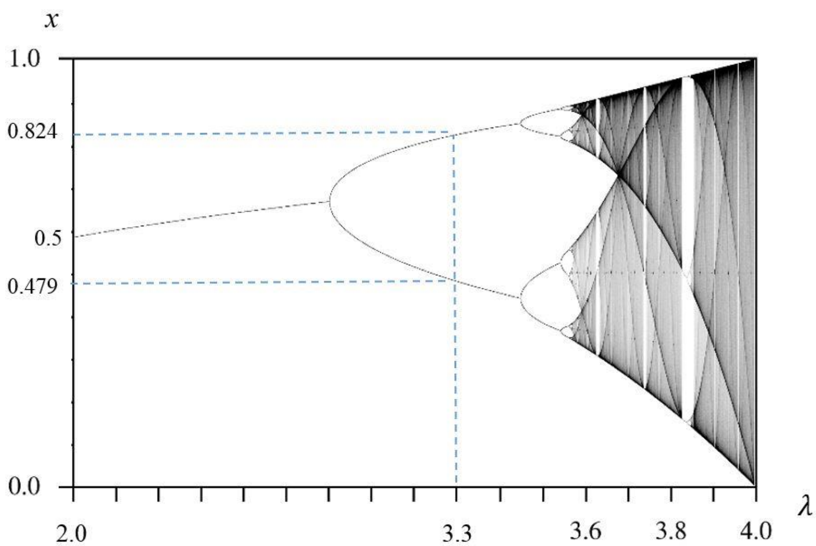


圖 3：Logistic 映射的計算結果曲線（稱為分叉圖）

上面的 Logistic 映射公式很簡單，連微積分都用不上，中學生都看得明白。但是，由它計算出來這幅圖 3 就不簡單了，特別是在參數 λ 取值接近 4 的時候。具體地說：

- 當 λ 由很小的正值（比如 0.1）變到 1 時，曲線很快地趨向於 0（是一個穩定值）。
- 當 λ 繼續增大，曲線慢慢上升，逐次到達一個接著一個的穩定值（曲線上一個個非零點，均為週期 1 的解）。
- 當 λ 繼續增大，曲線開始出現分叉，每次有 2 個穩定值（曲線上兩個點，對應一個週期 2 的解），比如上面計算 $\lambda = 3.3$ 的時候。
- 當 λ 繼續增大，曲線相繼出現 4 個、8 個、16 個、32 個 ... 穩定值（不同週期的週期解），這個過程稱為“倍週期分叉”。
- 當 λ 繼續增大到接近 4 時，系統進入“混沌狀態”，這時曲線上密密麻麻的點的全體組成了一個週期很長的解。
- 之後，如果 λ 再繼續增大，到超過 4 時，複雜的曲線就突然“坍塌”而發散，變得簡單無趣了。

這個過程以及圖 3 所示的曲線，都出乎意料的複雜吧？

不過，聰明的你馬上注意到了：週期總在兩倍成對地出現，好像這 Logistic 映射祇有偶數週期的週期解吧？

不是的。看到圖 3 曲線右側有一些“窗口”了嗎？例如 $\lambda \approx 3.828$ 對上的地方有一個比較寬的窗口，那裡祇有 3 個點，對應著週期 3 的解。再往左看，$\lambda \approx 3.738$ 對應著週期 5 的解，$\lambda \approx 3.702$ 對應著週期 7 的解，等等。這 Logistic 映射不但有偶數的週期解，還有多種不同奇數的週期解，祇不過它們不像偶數分叉過程那麼有序而已。

事實上這神奇的映射還有不少其他有趣的特性呢。

如果把對應 2、4、8、16 ... 等分叉點的參數 λ 值記為 α_1、α_2、α_3 ... 等等，那麼 $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ 就是它們兩兩之間的距離。考慮比值

$$\delta_n = \frac{\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2}}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

你會發現，當 $n \to \infty$ 時，$\delta_n \to 4.6692\cdots$。這個極限數位叫費根鮑姆常數，由費根鮑姆（Mitchell Feigenbaum，1944-2019）在 1975 年用簡單的 HP-65 計算機算出。費根鮑姆還通過高階微分運算發現了關於分叉高度差之比的極限，即費根鮑姆第二常數 $2.5029\cdots$。不過更值得一提的是，費根鮑姆常數對同類型的映射如 $x(k+1) = \mu - x^2(k)$ 都是成立的，也就是說它具有一定的普適性。

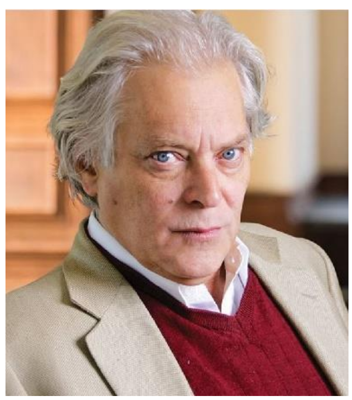


圖 4：Mitchell J. Feigenbaum（1944-2019）

1976 年，羅伯特・梅在《Nature》上發表的題為“Simple mathematical models with very complicated dynamics”的論文，詳盡地介紹和分析了這個簡單神奇的 Logistic 映射。今天，這篇論文已被視為離散混沌理論的開山之作，而 Logistic 映射就是離散混沌系統的第一個和最重要的一個代表性例子。

不過，離散混沌的精彩故事還得從 1973 年的馬里蘭大學講起。

馬里蘭大學在 1949 年成立了一個“流體動力學與應用數學研究所”，1976 年後改名為“物理科學與技術研究所”。1972 年，該研究所氣象組的 A. Feller 教授將愛德華・洛

倫茨在氣象學期刊上發表的關於氣象預測模型的 4 篇文章推薦給數學系的詹姆斯・約克（James A. Yorke），說這些文章太理論和數學化了，他們看不懂，但也許數學教授們會感興趣。這幾篇文章中，最關鍵的是洛倫茨發現第一個具體混沌系統的論文“Deterministic nonperiodic flow”（Journal of Atmospheric Sciences，20: 130-141，1963），該文至今被引用23,000 多次。

圖 5：Edward N. Lorenz（1917-2008）

1973 年 4 月的一天下午，約克一位得意門生李天岩（Tien-Yien Li）來到了他的辦公室。約克興奮地說：“我有個好想法要告訴你！”李天岩當時是他的博士生，1968 年從臺灣新竹清華大學數學系畢業後服了一年兵役，然後來到了約克門下，做微分方程研究。雖然是學生，李天岩衹比導師小四歲，因此兩人亦師亦友。像平常那樣，李天岩半開玩笑地問：“你這個新想法足以往《美國數學月刊》投篇文章嗎？”大家都知道，《美國數學月刊》（American Mathematical Monthly）是創辦於 1894 年的老雜誌，很有名氣，但衹是數學科普類型的月刊，通常不發表高深數學論文。約克笑了笑，說他真有個新想法，源於洛倫茨的 4 篇文章。李天岩聽完那個想法之後，感慨地說：“這樣的結果確實非常適合那個月刊！”因為他預感到了，如果能夠把結果證明出來的話，其描述並不需要涉及高深的數學語言，大學生研究生應能看得懂。

大約兩個星期之後，李天岩向導師作了彙報：證明完成了！約克的想法是對的：一個從區間到區間的連續映射如果有週期 3 的解的話，它就是"混沌"的。具體一點的通俗表述就是：考慮一個連續映射 f：$[0,1] \to [0,1]$。那麼：

（1）如果存在點 $a \in (0,1)$，使得映射 f 在其上滿足：$f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a)$ 或者 $f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a)$。這裡 f^m 是映射 f 的 m 次疊代運算（特別地，當 $f^3(a) = a$ 時，映射 f 有週期 3 的解），由此可以推出，對任何一個正整數 n，映射 f 都有週期 n 的解。

（2）如果存在區間$[0, 1]$ 中一個不可數的點集，使得映射 f 從其中任何一個點出發的疊代運算結果數列既不是週期的，又不趨向於任何一個週期解，最終的走向是不可預測的“混亂”，由此可以推出，映射 f 對初始條件具有高度的敏感性。

映射 f 在上述意義下是“混沌”的。

可能李天岩一直把月刊放在心裡，他證明上述定理過程中盡量避免把推理寫得晦澀難懂，所用到的衹是初等微積分裡的連續函數的介值定理。

他們把文章的嚴格證明寫好後，竟然破天荒地正式引進了一個“並不數學”的名稱 Chaos（混沌），因為映射 f 是完全確定性的，但疊代運算結果卻是不可預測的“混亂”。有趣的是，兩位作者還真按照原來開玩笑時說的那樣，把文章投到月刊去了。當時文稿的參考文獻衹列有洛倫茨的那 4 篇文章。

可是沒過多久，稿件被月刊退回來了，說文章的學術研究味道還是太重了，不適合他們的讀者群。那時兩位作者也漫不經心，尚未感覺出他們這篇文章有什麼偉大意義。於是李天岩把稿件往辦公桌上一丟，就讓它在那裡躺了將近一年時間，兩人都不再過問。

1974 年是馬里蘭大學數學系的生物數學“特殊年”，期間他們每周都請生物數學這個領域中一位最傑出的學者來系裡演講。在 5 月份的第一周，他們從普林斯頓大學生態和動物系請來了羅伯特・梅，請他每天給一個講座。最後一天是週五，上午演講時羅伯特・梅介紹了他發現的 Logistic 映射，即蟲口模型，也就是那幅有趣的圖 3。當時羅伯特・梅有把握的衹是圖中左邊對應著較小數值 λ 那部分比較規則的曲線所表達的生物含義。至於當參數 λ 接近 4 時圖形表現出來“亂七八糟”的行為，他也解釋不清楚，說也許衹是計算誤差所造成。

下午課程結束，約克便把客人送到飛機場。其間，約克把與李天岩合寫的手稿送給他看。羅伯特・梅過目後非常興奮，認定這個數學定理完全解釋了他的疑問。約克從飛機場折回學校後就去找李天岩，催促他說：“我們應該馬上改寫這篇文章。”

文章在兩周內就改寫好了，引用了羅伯特・梅的工作，從 Logistic 映射談起，並補充了一些相關文獻。兩位數學家不改初衷，把文章重投《美國數學月刊》。

三個月後，月刊通知他們，文章現在可以接收了。這篇“數學科普”文章不但有洛倫茨的氣象系統，還有羅伯特・梅的 Logistic 映射，更有一條漂亮的數學定理，最後於 1975 年 12 月面世（T.-Y. Li and J. A. Yorke, "Period three implies chaos", American Mathematical Monthly, 82: 985-992, 1975）。該文至今被引用 5,000 次。後來羅伯特・梅回憶說，其實他在看到李--約克手稿之前，並不知道洛倫茨和他的系統。

普林斯頓高等研究院已故理論物理學家弗里曼・戴森（Freeman Dyson, 1923-2020）在他於 2009 年初由《美國數學會會刊》（Notices of the American Mathematical Society）發表的、在“愛因斯坦講座”上演講過的文章“鳥與蛙”（Birds and Frogs）中說：“在混沌學的領域中，我知道的衹有一條嚴格證明了的定理，那是由李天岩和詹姆斯・約克在 1975 年發表的一篇短文‘週期三意味著混沌’中所建立的。”他將李--約克的這篇論文譽為“數學文獻中不朽的珍品之一”。

圖 6：約克為慶祝李天岩（1945-2020）70 大壽專門定製了一瓶標有"混沌"商標的葡萄酒

但是，李--約克定理的故事並沒有就此結束。

翌年，約克到前蘇聯參加一個國際數學會議，報告了李--約克定理。會後約克遊逛時，一位略為年長的數學家叫住了他，友好地笑著說，你這“週期 3 意味著所有週期”的結果呀，我十年前就發表過了，而且其中的週期隱含規律我都說清楚了。

啊？！ 這著實讓約克大吃了一驚。

這位老大哥是烏克蘭數學家沙可夫斯基（Oleksandr M. Sharkovsky，1936-），他的論文用俄文發表在一個不甚知名的烏克蘭數學雜誌上（"Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself"，Ukrainian Mathematical Journal，16：61-71，1964）。

圖 7：Oleksandr M. Sharkovsky（1936 - ）

沙可夫斯基定理說的是，讓我們把所有的正整數 n 按以下的順序排列起來：

$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \cdots\cdots,\ (2n+1)\times 2^0,\ \cdots\cdots$

$3\times 2,\ 5\times 2,\ 7\times 2,\ 9\times 2,\ 11\times 2,\ \cdots\cdots,(2n+1)\times 2^1,\cdots\cdots$

$3\times 2^2,\ 5\times 2^2,\ 7\times 2^2,\ 9\times 2^2,\ 11\times 2^2,\ \cdots\cdots,\ (2n+1)\times 2^2,\ \cdots\cdots$

$3\times 2^3,\ 5\times 2^3,\ 7\times 2^3,\ 9\times 2^3,\ 11\times 2^3,\cdots\cdots,\ (2n+1)\times 2^3,\ \cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots,\ 2^n,\ \cdots\cdots,\ 2^6,\ 2^5,\ 2^4,\ 2^3,\ 2^2,\ 2^1,\ 2^0$

那麼，對於連續區間映射 $f:[0,1]\to[0,1]$，如果 f 有週期為 m 的解，即 $f^m(x)=x$ 但 $f^k(x)\neq x\ \ (0<k<m),\ x\in[0,1]$，並且在上面的次序中 n 排在 m 後面的話，則 f 一定有週期為 n 的解。

不過，沙可夫斯基定理是一個拓撲學而不是動力系統方面的結果。它基本上包括了李--約克定理中的第一部分，即如果該映射有週期為 3 的解，它就有所有正整數週期的解；但它完全沒有涉及到李--約克定理中的第二部分，即該映射對初始條件的極端敏感性。而今天的混沌數學理論就是建立在這個最根本的敏感性條件之上，與“具有所有週期”這一特性關係不大。因此，今天科學界說的著名的“李--約克定理”（Li-Yorke Theorem），指的是它的第二部分。不過，尊重原文的歷史性標題，也為了讓讀者容易記憶，習慣上大家還是保留原來的說法，即李--約克定理是一個關於“週期三意味著混沌”的結果。

李天岩和約克這兩位數學家始料不及，他們出於好奇心寫出來的這篇科普雜誌上發表的“小文章”，以半開玩笑的方式使用了“混沌”（chaos）一詞，卻為整個離散動力系統理論引進了一個全新的研究方向，建立了嚴格的離散混沌理論基礎，並提供了一個關於對初始條件高度敏感性的關鍵數學判據。

後來，約克和“分形之父”本華・曼德博（"Father of fractals", Benoit B. Mandelbrot，1924-2010）一道分享了 2003 年的十分著名的日本獎（Japan Prize）。

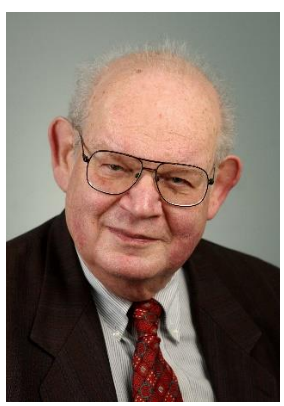


圖 8：Benoit B. Mandelbrot（1924-2010）

像 Logistic 映射疊代運算之後會有週期解那樣，我們關於離散混沌的傳奇故事從羅伯特•梅開始，回顧了許多歷史和人物之後，最終還要回到起點，再說羅伯特•梅的人生。

羅伯特•梅於 1936 年 1 月 8 日出生於澳大利亞悉尼市，父親是北愛爾蘭裔的一位律師，母親是蘇格蘭一位工程師的女兒。他七歲那年，父母離異。他的本科在悉尼大學修讀化學工程和理論物理，1956 年獲得理學學士學位，1959 年以“Investigations towards an understanding of superconductivity”為畢業論文獲得理論物理學博士學位，隨後到哈佛大學當了兩年博士後，其時擔任冠名 Gordon MacKay 應用數學講師。在哈佛期間，他和在紐約曼哈頓一個猶太家庭出生長大的 Judith Feiner 結了婚，兩人養育有一女兒 Naomi Felicity。1962 年，他回到悉尼大學任教理論物理學，先後任職高級講師、准教授（Reader，1964）、教授（Personal Chair，1969），至 1972 年。1973-1988 年間，他到了普林斯頓大學，接替去世的國際上最著名的理論生態學家 Robert MacArthur 的職位，成為冠名“Class of 1877”的生態和動物學教授。1988-1995 年間他轉到了英國，在牛津大學和帝國理工任皇家學會研究教授。1995-2000 年間，他任職英國政府首席科學顧問和英國科學技術委員會主席，2000-2005 年間出任英國皇家學會主席，2005 年之後為牛津大學和帝國理工榮休教授。

羅伯特• 梅是個關心公益事業的社會活動家。他的超凡演說能力得益於中學時期課外辯論活動受到的訓練。他曾經是劍橋大學、英國國家歷史博物館、英國皇家植物園、世界野生動物基金（WWF）、氣候變化委員會等政府及社會非盈利組織和機構的董事會或委員會成員。他從 1960 年代開始就關注人類環境保護，在任職英國政府首席科學顧問期間（1995-2000），他為政府首腦和決策機構制定了 UK Principles of scientific advice to government，其中提出了三條基本原則：公開透明、廣泛徵求意見和重視不確定性，為應對全球氣候變遷作了不少成功的有益建言。在 2008 年金融風暴時期，他研究了金融系統穩定性的數學理論並和英格蘭銀行一起設計了有效的調節政策以增加銀行系統的穩定性。

羅伯特• 梅是一個認真嚴謹的科學家。1996 年，他公開要求停止把“搞笑諾貝爾獎”（Ig Nobel）發給英國人，認為這有損科學和研究的嚴肅性。

羅伯特• 梅喜歡體育運動，特別是打乒乓球和網球。他還喜歡徒步行走---從 1975 年起，40 年來他每年都組織同事們進行暑期步行活動。平時他自己還經常跑步，20 年間跑了共約 15，000 公里。他甚至還是英國政府屬下的體育學院（UK Sports Institute）的委員會成員。

羅伯特• 梅還有一種進取型科學家的特質：要玩就要贏。他夫人 Judith 回憶說，Bob 在家常常和寵物狗 Perri 玩耍，“但每次他都要爭取去贏。”

回顧羅伯特• 梅的一生，你會發現：有些傳奇科學家就是這麼傳奇。

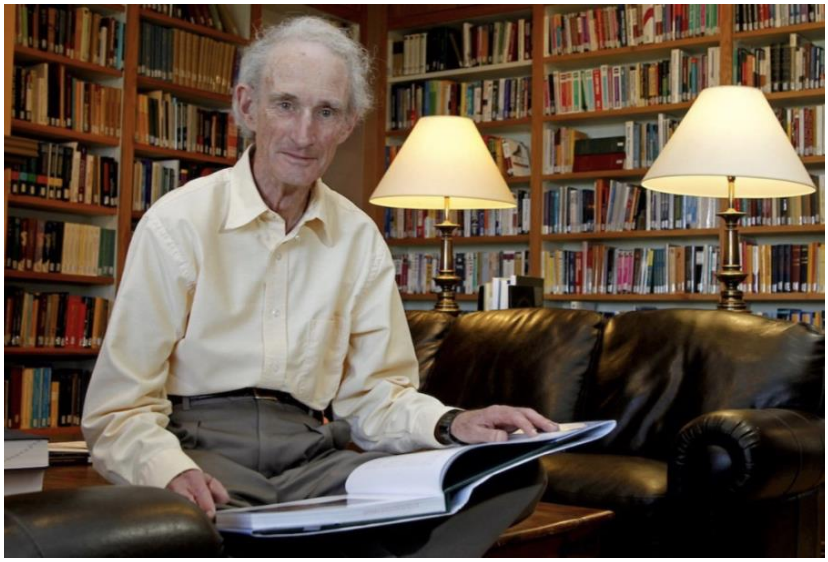


圖 9：羅伯特• 梅在聖塔菲研究所圖書館