沙可夫斯基——他为无穷多个函数周期排序

陈关荣

（香港城市大学）

乌克兰杰出数学家、乌克兰国家科学院院士亚历山大·米科拉约维奇·沙可夫斯基（Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky，1936 年 12 月 7 日 – 2022 年 11 月 21 日）在战火和新冠的双重创伤下辞世，享年 85 岁。

他的女儿奥莱娜·沙可夫斯卡（Olena Sharkovska）在 11 月 23 日发给朋友们的一份简短而悲伤的邮件中写道：

> 我的父亲亚历山大·沙可夫斯基于 2022 年 11 月 21 日上午 10:40 离世。过去的十天里，他在基辅的 Feofania 医院接受心脏复苏手术。他在过去的六个月内感染过两次 Covid-19。

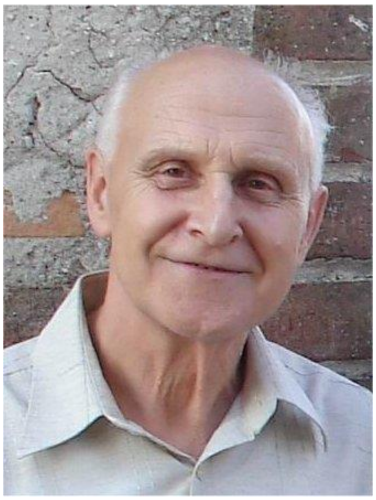


图 1 亚历山大·沙可夫斯基（2006）

我和沙可夫斯基的初次见面是 1997 年在俄罗斯圣彼得堡举行的第一届“混沌控制”国际会议上。之后，又在俄罗斯举办的国际会议上见过他三次。多年来，一直不曾忘怀他那文雅谦恭的举止和亲蔼慈祥的笑容。

【一】

要介绍沙可夫斯基的学术贡献，我们不妨从离散混沌理论讲起。

离散混沌理论最著名的奠基性数学原理就是李天岩–约克的“周期三意味着混沌”定理（T.-Y. Li and J. A. Yorke, “Period three implies chaos”, American Mathematical Monthly, 1975, 82: 985–992）。这条定理说的是一个从区间到区间的连续映射如果有周期 3 的解的话，它就是“混沌”的。具体一点的通俗表述如下：

> 考虑一个连续映射 f：$[0,1] \to [0,1]$。假定存在一个点 $a \in (0,1)$，满足 $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$ 或者 $f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)$，这里 f^m 是映射 f 的 m 次迭代。那么：
>
> （1）对任何一个正整数 $n = 1, 2, \cdots$，映射 f 都有周期 n 的解。
>
> （2）在区间 $[0, 1]$ 中存在一个不可数的点集，使得映射 f 从其中任何一个点出发的迭代结果数列既不是周期的，又不趋向于任何一个周期解，以致它的最终走向是不可预测的混乱。由此可以推出，映射 f 对初始条件具有高度的敏感性。
>
> 映射 f 在上述意义下是“混沌”的。

显然，如果 $f^3(a) = a$，即映射 f 有周期 3 的解，这满足定理的条件，从而定理的结论说 f 便有所有正周期的解。

1975 年，约克在德国东柏林举行的“第七届非线性振荡国际会议”上报告了这条“李–约克定理”。那次会议是在 Spree 河的一条船上举办的。在船上，沙可夫斯基友好地对约克说：你这“周期三意味着所有周期”的结论呀，我在十年前的文章里就已经证明了，而且我把其中的周期隐含规律都说清楚了。不过，沙可夫斯基说的论文是用俄文发表在乌克兰数学杂志上的（Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself, Ukrainian Mathematical Journal, 1964, 16: 61–71），约克当然无从知晓。

沙可夫斯基定理的大意是，如果把所有的正整数 n 按如下的次序排列起来：

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots \prec 2^n \prec \cdots$$

$$\cdots \prec 7 \cdot 2^n \prec 5 \cdot 2^n \prec 3 \cdot 2^n \prec \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots \prec 7 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec 3 \cdot 2 \prec \cdots$$

$$\cdots \prec 11 \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3$$

那么，对于一个连续映射 $f:[0,1]\to[0,1]$，如果 f 有周期为 m 的解并且在上面的次序中 $n \prec m$ 的话，则 f 也有周期为 n 的解。

定理中的符号 $\prec$ 除了表示次序还表示前后两个周期数的依赖关系。本质上，沙可夫斯基定理是一个拓扑学结论。它的确包括了李–约克定理中的第一部分，即如果该映射有周期为 3 的解，那么它就有所有其它正整数周期的解。但是，它完全没有涉及到李–约克定理中的第二部分，即该映射对初始条件的高度敏感性。而现代的混沌数学理论正是建立在这个最根本的敏感性条件之上，与“具有所有周期”这一特性其实关系不大。因此，今天学术界里说的李–约克定理，指的只是它的第二部分。不过，尊重原文的历史性标题，也为了让普通读者容易记住，习惯上大家还是保留原来的说法，即李–约克定理是一个关于“周期三意味着混沌”的有趣结论。

沙可夫斯基是以他上面这条数学定理闻名于世的。

不过，沙可夫斯基的这个研究成果并非一蹴而就。早在 1960 年，当沙可夫斯基还是个在读研究生时，他就研究了诸如 $\sin_n(x)=\sin(\sin_{n-1}(x))$, $n=1,2,\dots$, 的迭代过程，并总结起来发表了文章“一维迭代过程收敛的充分必要条件”（Necessary and sufficient conditions for the convergence of one-dimensional iterative processes, Ukrainian Mathematical Journal, 1960, 12, no. 4），证明了在所有指标 $k>2$ 时迭代周期的排序：$2\prec 4\prec \cdots$。次年，他又发表了文章“单实变量连续函数的可约性及其相应迭代过程稳态点的结构”（The reducibility of a continuous function of a real variable and the structure of the stationary points of the corresponding iteration process, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1961, 139(5): 1067–1070），证明了在指标 $k\neq 2^i$ 时对所有 m 的迭代周期的排序：$1\prec 2\prec \cdots \prec 2^{m-1}\prec 2^m \prec\cdots$。而上面所说的那条完整的著名定理，是他 1962 年投稿最后于 1964 年正式发表的。

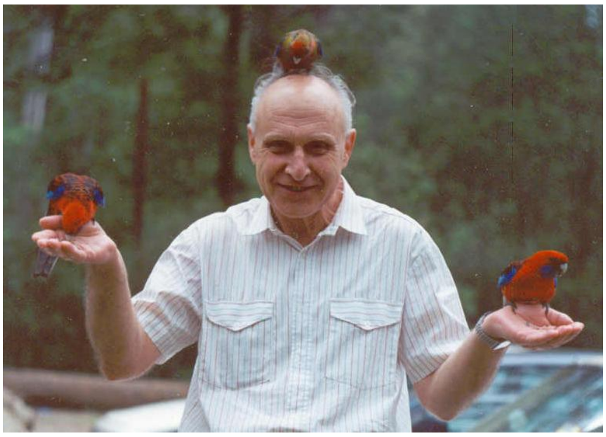
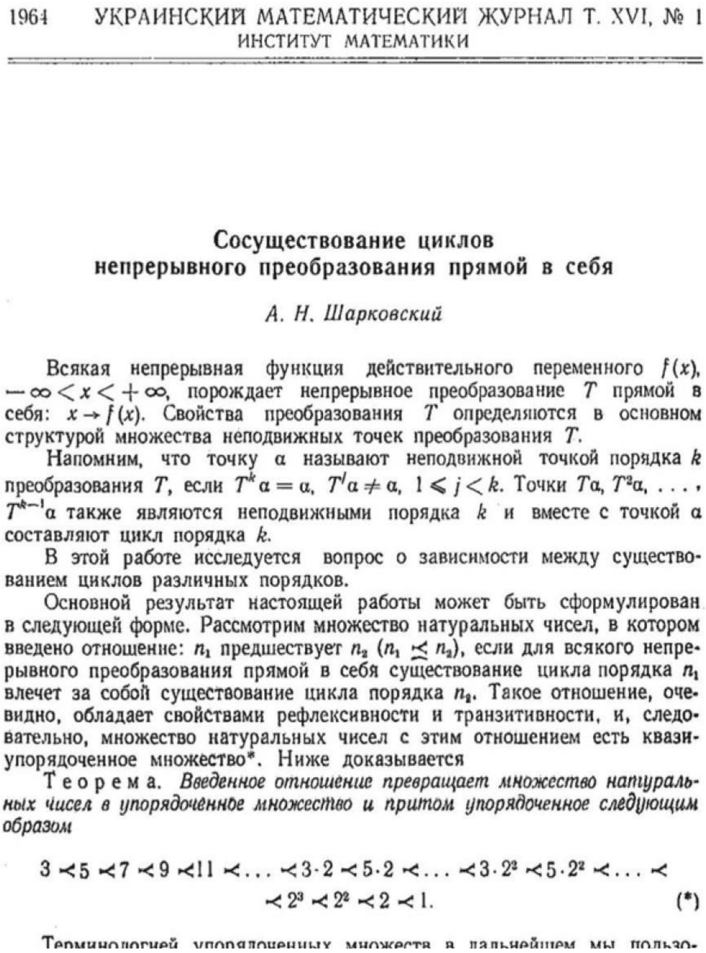


图 2 天性乐观的沙可夫斯基

1967 年，沙可夫斯基第一次出国，到了捷克首都布拉格参加一个关于非线性振荡的国际会议。会上，他报告了对一维差分方程 $x(n+1)=f(x(n))$ 的研究，其中介绍了上面那条关于不同周期的周期解共存和排序的定理。会议组织者在会议论文集发表了几乎所有与会报告的全文，却仅用一页纸以摘要形式刊登沙可夫斯基的报告（Proc. 4th Conf. on Nonlinear Oscillations, Academia, Prague, 1968, p. 249）。组委会负责人对他解释说，你那个结果只是基于最简单差分方程的颇为奇怪的自然数排序，很难与深刻的非线性振荡理论联系起来。而事实上，那个时代的许多数学家对一维动力系统都带有类似的偏见。于是，这条漂亮的定理就像睡美人一样沉睡了十多年，直到沙可夫斯基遇见约克之后，因为它支持了离散混沌理论，才引起数学界的广泛兴趣和关注。



1964 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. XVI, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя

А. Н. Шарковский

Всякая непрерывная функция действительного переменного $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, порождает непрерывное преобразование T прямой в себя: $x \to f(x)$. Свойства преобразования T определяются в основном структурой множества неподвижных точек преобразования T.

Напомним, что точку α называют неподвижной точкой порядка k преобразования T, если $T^k\alpha=\alpha$, $T^j\alpha\neq\alpha$, $1\leqslant j<k$. Точки $T\alpha, T^2\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha$ также являются неподвижными порядка k и вместе с точкой α составляют цикл порядка k.

В этой работе исследуется вопрос о зависимости между существованием циклов различных порядков.

Основной результат настоящей работы может быть сформулирован в следующей форме. Рассмотрим множество натуральных чисел, в котором введено отношение: n_1 предшествует n_2 ($n_1 \preceq n_2$), если для всякого непрерывного преобразования прямой в себя существование цикла порядка n_1 влечет за собой существование цикла порядка n_2. Такое отношение, очевидно, обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, и, следовательно, множество натуральных чисел с этим отношением есть квазиупорядоченное множество*. Ниже доказывается

Теорема. *Введенное отношение превращает множество натуральных чисел в упорядоченное множество и притом упорядоченное следующим образом*

$$3\prec 5\prec 7\prec 9\prec 11\prec\ldots\prec 3\cdot 2\prec 5\cdot 2\prec\ldots\prec 3\cdot 2^2\prec 5\cdot 2^2\prec\ldots\prec \prec 2^3\prec 2^2\prec 2\prec 1. \qquad (*)$$

Терминологией упорядоченных множеств в дальнейшем мы пользо-

图 3 沙可夫斯基 1964 年著名论文（首页）

沙可夫斯基定理后来被翻译为英文（P. Stefan, A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, Commun. Math. Phys. 1977, 54, 237–248）。顺便提及，Sharkovsky ordering 的称谓，首先出自德国数学家 Peter Kloeden 的文章“关于沙可夫斯基共存周期排序”（On Sharkovsky’s cycle coexistence ordering, Bull. Austral. Math. Soc., 1979, 20, 171–177）。

1994 年 6 月，数学家们在西班牙 La Manga 召开了题为“沙可夫斯基定理之后 30 年：新视觉”（Thirty years after Sharkovsky’s theorem: New perspectives）的国际会议，特别回顾并表彰了沙可夫斯基的杰出贡献。

1995 年，著名俄裔美国数学家 Yakov G. Sinai 在他的专著《遍历理论的现代问题》（Modern Problems of Ergodic Theory）第 11 章“沙可夫斯基序和费根鲍姆数的普适性”中写道：“大约 20 年前，我持有一种平常心态，认为一维动力系统的结构相对简单，可以被完全理解；此外，对一维成立的论断一般在高维情形都没有类似结果。但后来的发展表明，这两种看法都是错误的。一是在这里发现了令人惊讶和意想不到的新模式，二是其中一些结果可以很自然地转移到任何维度的案例中”。

图 4 约克在庆祝沙可夫斯基 82 岁生日学术会议上发言

沙可夫斯基毕生的数学研究集中在动力系统理论、微分和差分方程、数学物理和拓扑学。沙可夫斯基一生发表了约 250 篇论文和 7 本专著，留下了上面提及的著名 Sharkovsky ordering, 以及 Sharkovsky space, Sharkovsky set, Sharkovsky stratification, maximum period in the sense of Sharkovsky, 等等。他发展了一维动力系统的拓扑理论基础，研究了各种点集吸引流域的拓扑结构，并建立了动力系统简单性和复杂性的一些判别标准。他在任意紧集上的动力系统的一般理论中获得了一批基本结果。特别是，他证明了动力系统吸引子的不可压缩性。他还描述了几乎所有动力系统的全局稳定性类型，并为具有不同渐近线的轨道组成的集合给出了精确的界限描述。更重要的是，他开创了动力系统理论的一个新方向：组合动力学。此外，他还研究了数学物理的无限维动力系统和非线性边值问题，并提出了一个“理想湍流”概念，用确定性数学系统来模拟时间和空间中复杂的湍流特性。

沙可夫斯基毕生培养了 17 名博士学生。他们的研究领域分布在动力系统理论、稳定性理论、微分和差分方程理论、泛函微分方程理论、数学物理边值问题等方面。

【二】

沙可夫斯基于 1936 年 12 月 7 日出生在乌克兰基辅，自小喜欢数学。1951 年，他在中学参加过基辅青年数学家奥林匹克竞赛并获一等奖。1953–1958 年，他进入了基辅的国立 Taras Shevchenko 大学，就读于数学力学学院。毕业后，1958–1961 年间他在基辅的乌克兰科学院数学研究所读研究生。1961 年，他以题为“一维迭代过程的若干理论问题”（Some problems of the theory of one-dimensional iterative processes）的毕业论文获博士学位，后来于 1967 年以“关于离散动力系统的ω-极限集”（On ω-limit sets of the discrete dynamical systems）为题的博士论文获国家科学博士学位。

沙可夫斯基 1961 年获得博士学位之后毕生都在基辅的乌克兰科学院数学研究所工作，直至离世。期间，1964–1983 年、1999–2000 年以及 2014 年之后，他也在母校国立 Taras Shevchenko 大学兼任数学教授。

沙可夫斯基在乌克兰科学院数学研究所工作期间，于 1974–1987 年担任微分方程研究室主任、1987–2017 年担任动力系统理论研究室主任。2017 年他 80 岁正式退休，成为荣休资深研究员。

图 5 年轻教师沙可夫斯基（1969）

沙可夫斯基 1978 年被选为乌克兰科学院通讯院士，2006 年成为正式院士。他获得的主要荣誉包括：

- 乌克兰国家科学院 Bogolyubov 奖（1994）
- 乌克兰国家科学院 Lavrentyev 奖（2005）
- 乌克兰国家科学技术奖（2010）
- 国际差分方程学会 Bernd Aulbach 奖 （2011）
- 捷克 Silesia 大学荣誉博士学位（2014）

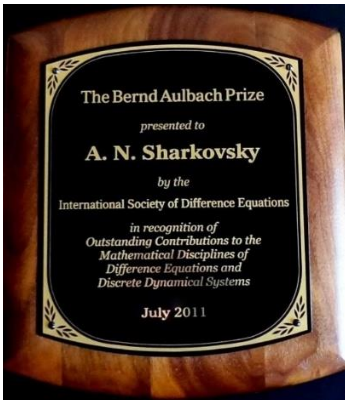


图 6 国际差分方程学会 Bernd Aulbach 奖（2011）

多年来，沙可夫斯基一直是我目前主编的《国际分叉与混沌杂志》（International Journal of Bifurcation and Chaos）的荣誉编辑。不幸的是，从现在起我与他联络的通讯邮址 asharkov@imath.kiev.ua 变成了一个静默的历史记号。今天，我谨以这篇短文感谢他的支持和贡献，并表达对他的崇敬和怀念。

图 7 沙可夫斯基在学术会议上发言