

# 我们生活在复杂而又简单的小世界里

陈关荣

(香港城市大学)

人类社会很大，也很复杂。但是，你常常会发现，其中许多复杂性是由一些简单规则决定的。你在生活中可能会有过这样一种体验，就是当你和一位新认识的朋友谈及某个人的时候，对方十分惊讶地回应：“啊，你也认识他？这世界真小！”

这世界真的很小吗？你通常并不这样认为。世界上人很多，约有 80 亿，而根据牛津大学人类学家罗宾·邓巴 (Robin I. M. Dunbar, 1947-) 的研究，平均来说每个成年人通常只维系着不足 150 个联络人。这个“邓巴数”相对于 80 亿来说可以忽略不计。因此，比如说，你我互相认识，你在上海而我在香港，现在我说我在阿根廷随机地找出一个人来，问你和这个人之间要通过多少个两两互相认识的中间人才会连接起来？那么你会猜测至少需要十来二十个中间人吧。根据一般人的生活经验，这是个合理的估计。但是，如果我告诉你，我以前在美国教书时有一个阿根廷学生毕业后回国当教授了，你马上就知道只需通过我，你立即就被连接到阿根廷，从而便会意识到上面的估计过于保守了。

事实上，你这个感觉是对的。

早在 1929 年，匈牙利作家弗里吉斯·卡林蒂 (Frigyes Karinthy, 1887–1938) 在《所有事物都是不同的》(Everything is Different) 一书中题为“Chain-Links”的章节里写道 [1]:

地球从来都没有像现在这样小。

.....

我们可以从地球上的 15 亿居民中选出任何一个人——不管是什么人，在什么地方——他都能够向我们打赌，他只需要不超过 5 个中间人就可以通过“熟人网络”联接到任意指定的另一个人。

这就是后来周知的“六度分离” (six degrees of separation) 原理。任意两个互相认识的熟人之间定义为一度分离。故此，两个人之间如果有五个其他人，这两个人之间就有六个连接关系，即彼此为六度分离。

这里，卡林蒂已经提及了小世界 (Earth is tiny) 和熟人网络 (network of personal acquaintances)。不过，卡林蒂的这段话是经验性的，他和他的同事都没有做过社会调查或人群实验去验证他的论断。

真正以社会实验去验证六度分离原理的是哈佛大学毕业并留校任教的社会心理学教授斯坦利·米尔格拉姆 (Stanley Milgram, 1933–1984)。1967 年，米尔格拉姆在内布拉斯加州奥马哈市 (Omaha, Nebraska) 和堪萨斯州威奇托市 (Wichita, Kansas) 联络了 160 名随机选定的游戏参与者。他给每个人发了一个包裹，上面写着最终收件人的姓名和地址，那是在波士顿市匿称为“Mr. Jacobs”的一名股票经纪人。米尔格拉姆让实验参与者们将包裹转发给他们认为有可能进一步把包裹传递到收件人的某个熟人朋友。米尔格拉姆通过所有中间传递人寄回的确认证明信片来跟踪每个邮件的转发情况。虽然最后很多包裹不知寄到哪里去了，但是成功的案例中有一些只用了四天时间就被转寄到收件人手中，其间只通过 2 个两两相识的熟人。其它例子也有多达 10 个中间人的。米尔格拉姆注意到，所有结果的中位数是 5 个

中间人，即六度分离。米尔格拉姆在 1967 年 5 月的《今日心理学》（Psychology Today）杂志创刊号上发文报告了他这个“小世界实验”的结果 [2]，让六度分离原理名噪一时。

当然，在有高速计算机、互联网和大数据的今天，你对米尔格拉姆当年的小规模社会实验是不会满意的，对他的结论也会存疑。和你的想法一样，网络科学家们早已对那令人疑惑的六度分离原理进行了多种大规模的实践检验。

2003 年，时为哥伦比亚大学社会学教授的邓肯·瓦茨（Duncan J. Watts, 1971-）和他的研究小组首次大规模地重复了米尔格拉姆的社会实验。他们使用了包括 13 个国家的 6 万多个电子邮箱地址并设定了 18 个目标用户来进行电子邮件传递实验。结果，他们发现邮件通过 5~7 次传递便分别到达了目标用户，从而极有说服力地印证了六度分离原理 [3]。

2011 年，Facebook 数据团队宣布，他们根据对 7.21 亿活跃 Facebook 用户的 690 亿条好友连接的调查，发现用户平均分离数目仅为 4.7 [4]。显然，这个数字比 6 小多了。

2016 年，Facebook 数据团队再次宣布，新的结果平均分离数目下降到 3.74 [5]。它表明我们的世界变得越来越小了，也就是说人与人之间的联系变得越来越紧密了。这无疑是 High-Tech 的功劳。

上面这些有趣的社会调查和实验数据可以帮助我们厘清日常生活中基于小规模和局部观测而获得的许多模糊概念和肤浅认识。但是，想要进一步清晰地描述并深刻地研究这些小世界现象及其特性，我们还需借助数学图论来建立相应的复杂网络数学模型。

在图论中，一个人可以用一个“节点”（node）来表示，而两个互相认识的人之间的关系可以用一条“连边”（edge）来表示。图论中的节点是没有大小的，连边也不分长短，每条连边的长度都定义为 1；也就是说，两个相连的节点之间的距离（distance）定义为 1。这样，六度分离就可以用具有 7 个节点和 6 条连边组成的链形图来表示，其两个端节点的距离就等于 6，刻画了六度分离。在一个具有许多个节点和许多条连边组成的图（或者网络）中，任意两个节点的距离以连接它们之间最短的路径来计算。由于任意两个节点之间都有一个确定的距离，一个网络所有这样的距离的平均值称为网络的平均距离（average distance）。容易想象，一个网络平均距离短的话，任意两个节点便相距不远。因此，“平均距离短”是小世界网络的一个主要特征。

描述小世界网络的另一个重要指标是“群集系数”（clustering coefficient），它是一个节点的所有邻居节点之间互相连接的比例数值。打个比方说，如果你的所有熟人朋友彼此之间也都互相认识，那么你的群集系数就等于 1（即 100%），这时你这个节点和你的所有邻居节点一起组成一个全连接的子网络；如果你的所有熟人朋友彼此之间都互相不认识，那么你的群集系数就等于 0，这时你这个节点和你的所有邻居节点一起组成一个以你为中心的星形子网络。一般情况下，群集系数落在 0 和 1 之间；该系数越大（即越接近 1），节点聚集得就越紧密，彼此相距不远。因此，“群集系数大”是小世界网络的另一个主要特征。

历史上第一个具体明确的小世界网络数学模型是 1998 年时为康奈尔（Cornell）大学应用数学博士研究生的邓肯·瓦茨在导师史蒂文·斯托加茨（Steven H. Strogatz, 1959-）指导下发表在《自然》杂志上的一篇文章中建立的，称为 WS 小世界网络模型 [6]。该模型在具有较大群集系数的近邻连接规则网络（例如环形网络，见图 1，左图）的基础上，把所有可能的节点对按某种规律以相同的概率删除连边然后把该连边在网络中作随机重连（见图 1，中图）。由于随机性，必然出现一些新的远程连接边，把两两原来相离较远的节点对连接起来。正是这些远程连接边把整个网络的平均距离大大缩短了，让它变成了一个“小世界”。

1999 年，在康奈尔大学物理系工作的马克·纽曼（Mark E. J. Newman）和博士研究生瓦茨一起建立了另一个小世界模型，称为 NW 小世界网络模型 [7]。该模型同样在具有较大群集系数的最近邻接规则网络（见图 1，左图）的基础上，简单地以相同的概率增加一些连接边

(见图 1, 右图)。由于随机性, 必然出现一些远程连接边, 把一些相离较远的节点对连接起来。同样, 这些新的远程连接边把整个网络的平均距离大大缩短了, 也让它变成了一个“小世界”。

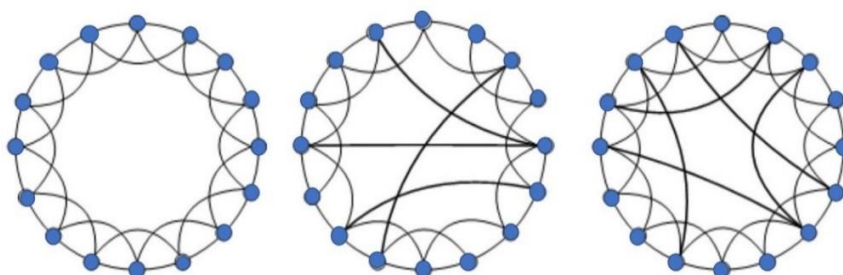


图 1 近邻连接规则网络、WS 和 NW 小世界网络模型示意图

明白了小世界网络的意思后, 你会很容易发现, 在我们现实生活中有许许多多这样的例子。我这里介绍一个有趣的例子, 主角是美国好莱坞电影明星凯文·培根 (Kevin N. Bacon, 1958-)。培根在 1994 年 1 月接受《首映》(Premiere) 杂志采访时提到, 他“曾与好莱坞的每个人或与他们合作过的那些人都有过合作”。例如, 他和汤姆·克鲁斯 (Tom Cruise, 1962-) 合演过一部电影“A Few Good Men”, 因此他俩的“合作距离”为 1。现在, 我们给克鲁斯一个“培根数”为 1。培根和玛丽莲·梦露 (Marilyn Monroe, 1926-1962) 属不同时代的人, 他俩没有合演过电影。但是, 培根和罗伯特·瓦格纳 (Robert J. Wagner, 1930-) 合演过电影“Wild Things”, 而瓦格纳和梦露合演过电影“Let’s Make It Legal”。因此, 瓦格纳的培根数为 1 而梦露的培根数为 2。老一辈的读者都会记得滑稽的哑剧演员查理·卓别林 (Charlie S. Chaplin, 1889-1977), 他和巴里·诺顿 (Barry Norton, 1905-1956) 合演过电影“Monsieur Verdoux”, 而诺顿又和瓦格纳合演过电影“Wha Price Glory”。于是诺顿的培根数为 2 而卓别林的培根数为 3。如此类推, 几乎所有的好莱坞演员都有一个培根数。2023 年 1 月 1 日互联网上的统计数字表明 (见图 2), 在全球接受调查的 1,119,819 位男女电影演员中, 培根数为 1 的共有 2,054 人, 培根数为 2 的共有 206,538 人, 培根数为 3 的共有 636,793 人, 等等, 平均值为 3.095。这一电影界的小世界现象被称为“培根六度分离”。

Kevin Bacon Number	# of People
0	1
1	2054
2	206,538
3	636,793
4	238,520
5	30,365
6	4,578
7	785
8	153
9	28
10	4

Total number of linkable actors: 1,119,819  
 Weighted total of linkable actors: 3,465,893  
 Average Kevin Bacon number: 3.095

图 2 培根数表 (2023 年 1 月 1 日) [8]

最后，我引用自己一个特别的学术关系网络作为实际例子向读者描绘科学界中的某些小世界现象。在数学领域里，莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler, 1707–1783）和卡尔·高斯（J. Carl Friedrich Gauss, 1777–1855）是众所周知的 18 世纪两位杰出著名的数学家，他们属于历史上最伟大的数学家行列。我本人于 1987 年在美国 Texas A&M University 获得应用数学博士学位。和其他人一样，我自己当然不会想到与几乎三百年前的这两位数学大师有什么学术关联。2007 年，我从《美国数学学会通讯》（Notices of the AMS）中看到一篇评论，其中介绍了一个关于全球数学家的学术家谱调查记录项目（Mathematical Genealogy Project）[9]。在那里，我从自己的名字（Guanrong Chen）所在网页开始，立即找到了我的博士导师的名字（Charles K. Chui），然后从他的名字所在网页又找到他的两位共同博士导师的名字（Jacob Korevaar 和 Simon Hellerstein），如此一直往前查找，最后竟然发现有两个师生关系的家谱分支，其中一个分支追溯到欧拉而另一个分支追溯到高斯（见图 3）。这两个分支的分叉点是数学家 Albert Edrei（1914–1998），他有两位共同博士导师（见图 3）。也就是说，我发现自己原来是欧拉和高斯的第十代博士学生。啊，这个世界真小！



图 3 笔者（G. R. Chen）的博士师生关系家谱

故事讲到这里，其实读者你早就知道我们都生活在一个小世界里，因为你记得唐朝诗人王勃（650–676）的著名诗句：“海内存知己，天涯若比邻”，对吧？

### 参考文献

- [1] Frigyes Karinthy, “Minden másképpen van” (Everything is Different), Publisher: Atheneum Irodalmi és Nyomdai R.-T, Budapest, 1929.
- [2] Stanley Milgram, “The small world problem,” *Psychology Today*, 1: 60-67, May 1967; 更精确的报告: Jeffrey Travers and Stanley Milgram, “An experimental study of the small world problem,” *Sociometry*, 32: 425-443, December 1969.
- [3] Peter Dodds, Roby Muhamad and Duncan J. Watts, “An experimental study of search in global social networks,” *Science*, 301(5634): 827-829, August 2003.
- [4] Johan Ugander, Brian Karrer, Lars Backstrom, and Cameron Marlow, “The anatomy of the Facebook social graph,” [arXiv:1111.4503](https://arxiv.org/abs/1111.4503), November 2011.
- [5] Sergey Edunov, Smriti Bhagat, Moira Burke, Carlos Diuk, and Ismail Onur Filiz, “Three and a half degrees of separation,” Meta Research website, February 2016. <https://research.facebook.com/blog/2016/2/three-and-a-half-degrees-of-separation/>
- [6] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz, “Collective dynamics of small-world networks,” *Nature*, 393(1): 440-442, June 1998.
- [7] Mark E. J. Newman and Duncan J. Watts, “Scaling and percolation in the small-world network model,” *Physical Review E*, 60: 7332, December 1999.
- [8] 培根数表: <https://oracleofbacon.org/onecenter.php?who=Kevin+Bacon>
- [9] The Mathematical Genealogy Project: <https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>