

斯梅尔的球面外翻悖论

陈关荣
(香港城市大学)

给你一个空心的球，你能在不割开、不撕裂、无折痕的条件下把它从内向外翻转吗（图 1）？

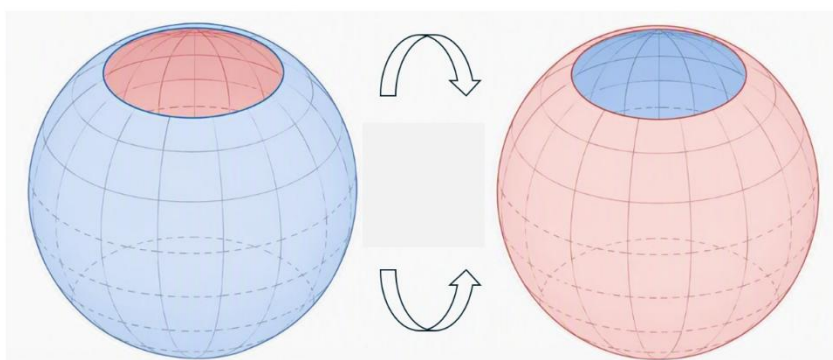


图 1 球面可以无缝外翻吗？

显然，你不能。当然，我也不能。不过，数学家能。

1956 年，美国数学家斯蒂芬·斯梅尔（Stephen Smale, 1930—，图 2）首次证明：球面外翻在数学上是可以实现的。

斯梅尔“球面外翻”（sphere eversion）是拓扑学中的一个惊人定理：在三维空间中，可以把一个空心球面在不割开、不撕裂、不产生折痕的情况下从内向外翻转。它极度违反直觉——现实操作根本不可能。数学的奇妙是，这操作可以严格证明是完全可行的。它被称为“斯梅尔悖论”（Smale paradox）。

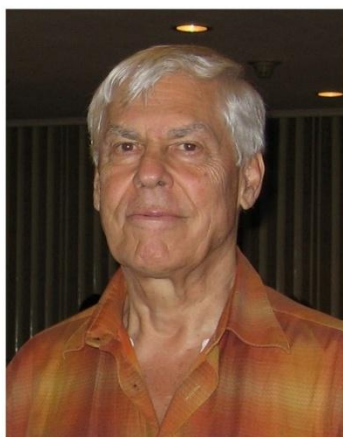


图 2 斯蒂芬·斯梅尔

在你始料未及之前，其实你也知道：数学家可以做很多你和我都做不了的事情。比如，如果我让你用笔和纸去一项一项地手算 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ ，你一生也做不完，因为在现实中这是不可能实现的。但是，数学家能立马告诉你这个总和等于 2。当然，这类数学操作现在你已司空见惯了。

1956 年，时为博士研究生的斯梅尔证明了球面可以外翻。当时，他给导师拉乌尔·博特（Raoul Bott，1923—2005）看论文草稿时，导师并不相信这是可能的。但是，导师仔细检查之后，便认定这个其貌不扬的学生的数学证明是对的！这位导师十分严谨，他是微分拓扑学奠基人之一，后来获 2000 年沃尔夫数学奖。

当年，斯梅尔证明了，只要允许球面在空间中自相交，即自己穿过自己但表面本身并不撕裂，便可以实现“球面外翻”。

作为一个直观的物理解释，我们生活中说“把气球里面翻出来”，是指把气球口拉开，将橡胶皮从里面拽出来。这个过程在物理上是可行的，条件是气球要有一个开口。另外，这种“翻出来”的操作过程通常都会导致气球橡皮表面严重拉伸和折叠，而且最终形状是一个皱巴巴的皮囊面。

斯梅尔把封闭的球面外翻则要求：球面始终是光滑的（没有尖角、没有折痕）；表面不被撕破（球面始终不出现洞口）；允许表面穿过自身（自相交）；最终球面的“内侧”变成“外侧”（曲面法向量方向整体反转）。从数学上说，这是一个浸入（immersion）过程，而不是一个嵌入（embedding）过程。这里整个过程的关键是允许自相交操作，从而在数学上一个表面和自己相交后就可以“穿”到另外一面去了。事实上，二维平面上的一条一维曲线通过自相交可以“穿越”到另一边去，三维空间中一个二维有边界平面也能够通过自相交而“穿翻”到背面去（图 3）。但是，一个球面怎样实现这种通过自相交而实现“内侧外翻”就只好想象了。虽然一个空心球面在三维空间里是一个二维曲面，这给球面的内侧外翻提供了可能性，但如何实现这个外翻的确是极具挑战的。斯梅尔的贡献，就是实现了这个数学球面的内侧外翻。



图 3 数学上曲线曲面可以通过自相交而“穿”到另一边去

为什么三维空间中的球面在直觉上不可能外翻呢？

在三维空间中，一个封闭曲面如球面把空间分成“内部”和“外部”。如果曲面在变形过程中不发生自相交，那么它的内侧和外侧是全局定义的。要把内侧翻到外侧，就

必须让曲面穿过自身。但如果穿过自身，便产生自交线，这又似乎破坏了无痕翻转的操作。用数学术语来说，球面内侧面的法向量在每一点指向内部。如果对整个球面进行连续变形，法向量方向会连续地变化。最终要反转的话，所有这些法向量都要指向外部，而这由内向外的转换过程中法向量的正负变化必须经过“零”或“奇异”（不可定义）的点。斯梅尔的思维突破是：数学上他有办法，让法向量方向在自相交处“交换身份”，使得全局法向量方向发生反转，但不需要任何一点的法向量变成零或暂时失去定义。

一个直观的比较是莫比乌斯带（Möbius strip）的“翻转”。莫比乌斯带是一条纸带，你把它扭转半圈后再首尾粘接起来，它就变成了一个环，但原来纸带的两面变成了纸环的同一面（图 4）。如果你沿着莫比乌斯带的一侧纸面一直往前走，你就会走遍纸带的“两面”并且可以永远地走下去。这好像就是你把纸带“翻转”了。但莫比乌斯带是不可定向的，即你沿着环面走一圈，法向量会反转，数学上无法全局一致地定义“正面”和“反面”，因而它并非真正被“翻转”了。

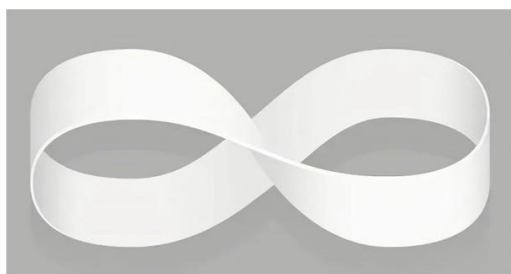


图 4 莫比乌斯带

另一个不可定向闭曲面在三维空间中通过自相交而翻入到自己内部去的例子是克莱因瓶（Klein bottle，图 5）。

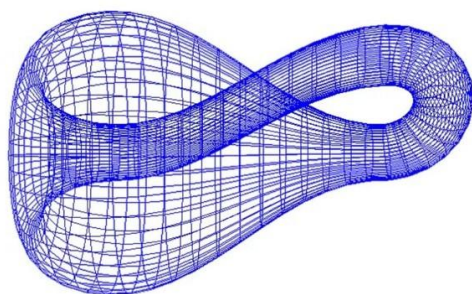


图 5 克莱因瓶

与莫比乌斯带和克莱因瓶不同，普通双面环和球面则是可定向的，存在正向和反向。斯梅尔外翻的奇妙之处在于：虽然球面在变形过程中是可以始终全局定向的，但通过适当的数学自相交操作，它的“内侧”和“外侧”互相作了交换。

斯梅尔利用了拓扑学中的正则同伦（Regular Homotopy）理论。那是微分拓扑学的一个核心概念，用来描述流形之间浸入的平滑连续变形。粗略地说，如果两个浸入映射能通过一个“自始至终保持浸入特性”的平滑连续过程实现互相转化，它们就是彼此正则同伦的。正则同伦展示了标准球面嵌入 $f:S \rightarrow R^3$ 与流形浸入 $f_t:S \rightarrow R^3$ （满足 $f_0 = f$, $f_1 = -f$ ）之间存在光滑连续变形变换。在拓扑学中有一条著名的 Smale—Hirsch 定理，它把浸入的同伦分类归结为切丛的映射问题。该定理后来被用来解释三维空间里克莱因瓶浸入和球面外翻的能行性。

不过，当年斯梅尔关于球面外翻的证明是间接的：他将球面浸入的正则同伦类与斯蒂费尔流形（Stiefel manifold）的同伦群联系了起来。由于对应球面在空间浸入的那个同伦群是平凡的，即为零群，因此标准嵌入与“内外翻转”浸入必然是正则同伦的。理论上，这一证明过程可以被展开从而构造出具体的正则同伦，但这在当时是数学技术上很困难的事。许多年过去了，一批新的数学工具发展起来，今天数学界已能给出好几个直接的证明。

下面，我们对斯梅尔高深复杂拓扑证明过程的可视化作个简单介绍。

1961 年，美国数学家阿诺德·夏皮罗（Arnold S. Shapiro, 1921—1962）提出了首个显式翻转（explicit eversion）表示方法，不过没有公开发表。他首先向法国盲人数学家贝尔纳·莫兰（Bernard Morin, 1931—2018）讲解了这一方法。之后，莫兰将其思想向法国拓扑学家勒内·托姆（René Thom, 1923—2002）作了解释。最终，得益于莫兰和乔治·弗朗西斯（George K. Francis, 1939—）的传播，这一翻转的思想实验广为人知。后来，美国数学家安东尼·菲利普斯（Anthony V. Phillips, 1938—）在与托姆的通信中得到极大启发，推导出类似夏皮罗所提出的那种翻转构造过程的具体步骤，并于 1966 年在《科学美国人》杂志上发表了一篇文笔优美的文章，让数学家和普罗大众首次了解到一种具体的翻转构造方式。

1970 年后几年间，莫兰改进了可视化程序。1976 年，美国计算机图形学家纳尔逊·马克斯（Nelson Max, 1943—）制作了经典的计算机动画《把球的里面翻出来》（Turning a Sphere Inside Out），首次用视觉化方式展示出外翻过程。1982 年菲尔兹奖得主、美国数学家威廉·瑟斯顿（William P. Thurston, 1946—2012）设计，巴西裔美国数学家西尔维奥·莱维（Silvio Levy, 1959—）等人参与制作的球面外翻可视化过程，使用了波纹法（Corrugations）核心技术。这项著名的拓扑学成果在 1994 年的计算机动画科普短片《外翻》（Outside In）中得到了完美的图形化呈现。1998 年，美国数学家约翰·沙利文（John M. Sullivan, 1963—）、乔治·弗朗西斯（George K. Francis, 1939—）和斯图尔特·利维（Stuart Levy）一起制作了著名的《光翻转》（Optiverse）动画片。他们利用能量最小化方法，寻找出最优雅的外翻路径。《光翻转》被认为是球面外翻的视觉技术巅峰之作，兼具数学严谨性与艺术美感（图 6）。

约翰·沙利文在解释他们的《光翻转》动画片时写道：“这种极小极大（minimax）球面翻转是一种几何上最优的球面内外翻转方式，它能使翻转过程中所需的弹性弯曲能

降至最低。从标准的球体开始（顶部，按顺时针方向），我们将北极向下推，使其穿过南极（右上），从而形成第一条自相交的双重曲线。随后，颈部的两侧向上隆起，这两处隆起相互穿过（右侧），形成第二条双重曲线。这两条双重曲线相互靠近，当它们交叉时（右下），会产生若干对三重交点。在中间状态模型（底部）中，所有四个三重交点汇聚于一个四重交点，并同时发生五次“地峡”变换（isthmus events）。该中间状态模型是曲面弯曲威尔莫尔能（Willmore energy）的一个对称临界点。其四重旋转对称性使得内表面与外表面发生互换。因此，在经过九十度扭转后，翻转过程的后半部分（左侧）可以按完全相同的阶段逆序进行。位于中央的大图应置于右侧最下方的两幅图像之间，其时间点略早于三重交点的产生。”

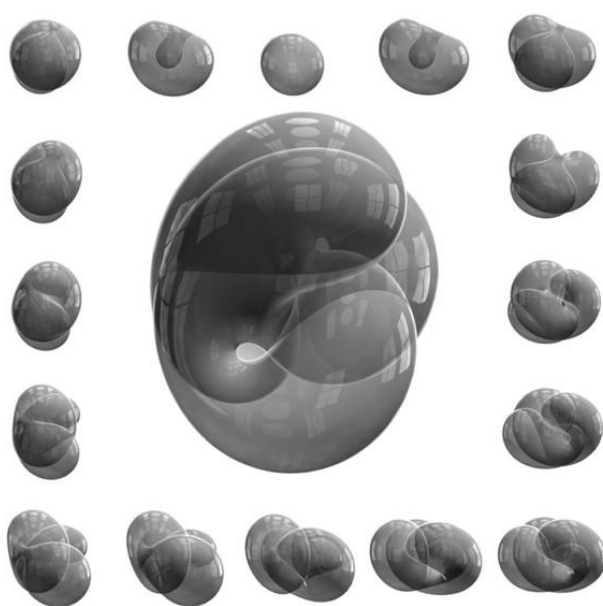


图6 《光翻转》（Optiverse）动画片

综合起来，一个经典的斯梅尔球面外翻过程大致分为五个阶段：

1. 初始球面：一个普通球面，球面法向量朝外。
2. 把球面压扁成非常薄的、表面依然光滑的“圆盘”。
3. 制造“波纹”：在圆盘上制造出一系列波纹，使得上下两片开始相互穿过，形成“赤道”自相交：在中间区域，曲面开始自相交，形成一条自相交曲线。此时曲面依然光滑，只是自己穿过了自己。
4. 内外交换：通过自相交区域，曲面的“内片”和“外片”逐渐交换位置。法向量方向在自交处发生“翻转”。
5. 通过展开回复球面形状：曲面自相交逐渐消失，最终回到一个光滑球面，但法向量方向已经反转——原来的球面内侧现在变成了外侧而外侧变成了内侧。

在上述整个变形过程中，曲面始终是光滑的，没有撕破，没有尖角，只是中间阶段有许多自相交。自相交是整个理论和技术的核心：没有自相交，球面外翻在三维空间中是不可能的。

一个物理类比是肥皂膜。肥皂膜可以自相交，因为它是流体，两片薄膜可以接触、合并然后又分开，在合并时两侧流体作了交换。在肥皂膜实验中，确实可以观察到机制类似的肥皂泡连续外翻过程。

顺便提及，在拓扑学中有一个“亏格”（genus）的概念。在三维空间里，球面的亏格为 0，表示没有洞，因此可以外翻。甜甜圈环面的亏格为 1，有 1 个洞。此外有亏格更高的各种曲面。拓扑学证明了，所有亏格不为 0 的可定向闭合曲面，比如甜甜圈环面，都不存在光滑的连续外翻操作。

最后感谢斯梅尔，为我们提供了这样一个饶有趣味的烧脑数学游戏。