

## 你知道泰勒级数，但你了解泰勒吗？

陈关荣

(香港城市大学)

如果你学过微积分，你一定知道泰勒级数 (Taylor series)，或称为泰勒展开式 (Taylor expansion)。

今天公认，微积分是由英国数学家艾萨克·牛顿爵士 (Sir Isaac Newton, 1643—1727) 和德国数学家戈特弗里德·莱布尼茨 (Gottfried W. Leibniz, 1646—1716) 共同创立的。比较细致的记录说，牛顿在 1669 年曾把一篇题为“分析学”的短文送给了他的老师巴罗 (Isaac Barrow, 1630—1677)。随后，他于 1671 年写了《流数术和无穷级数》手稿，不过该书直到 1736 年才出版。期间，莱布尼茨在 1684 年发表了一篇主题为“一种求极大极小和切线的新方法”的文章，已使用了一些现代微分符号和基本微分法则。接着，他在 1686 年又发表了一篇积分学论文。因此，微积分学发明的归属权一直都有争论，但本文不打算参与其中。

有了微分概念及其表达和计算法则之后，布鲁克·泰勒 (Brook Taylor, 1685 年 8 月 18 日—1731 年 11 月 30 日) 出场了，他是本文的主角。



图1 布鲁克·泰勒肖像

## 【一】

布鲁克·泰勒于 1685 年 8 月 18 日出生在英国 Middlesex 的 Edmonton，是约翰·泰勒（John Taylor, 1665—1729）的长子。泰勒的母亲 Olivia 是 Durham 约翰·坦普斯特爵士（Sir John Tempest）的女儿。当年泰勒家境殷实，父亲喜好音乐和艺术，让他得到无形熏陶。泰勒自小就没上过正规学校，一直在家里接收家庭教育，学习英语、文学和数学。1701 年 4 月，他被剑桥大学 St. John's College 作为一名自费生录取。泰勒于 1709 年毕业获得法学学士学位（LL.B.），接下来 1714 年获得法学博士学位（LL.D.）。

在剑桥，他得到伦敦 Gresham College 的天文学教授约翰·马钦（John Machin, 1680—1751）和牛津大学的天文学 Savilian 讲座教授约翰·基尔（John Keill, 1685—1700）的指导，学了很多很好的数学知识。1712 年，他写了一封信给马钦，给出了一个与约翰内斯·开普勒（Johannes Kepler, 1571-1630）行星运动第二定律相关问题的解。1714 年，他在《英国皇家学会哲学汇刊》（Philosophical Transactions of the Royal Society）第 18 期发表了他在 1708 年就获得的一个物体振荡中心问题的解。由于手稿在前而发表在后，这个成果导致了与瑞士数学家约翰·伯努利（Johann I Bernoulli, 1667—1748）关于优先权的争议，但此事并不大，后来不了了之。

泰勒先后在《英国皇家学会哲学汇刊》的第 17 至 32 期发表过 13 篇论文，其中有关于毛细现象、温度计和磁实验相关数学问题的研究成果。

1712 年 4 月，泰勒被选为英国皇家学会会士（Fellow）。同年，他被学会委派进入裁决牛顿和莱布尼茨微积分发明权案子的委员会。之后，他于 1714 年 1 月被选为皇家学会秘书长，任职至 1718 年 10 月。

这段时期，泰勒曾多次访问法国。特别是，他与法国数学家皮埃尔·德·蒙莫特（Pierre R. de Montmort, 1678—1719）建立了科学通信，讨论无穷级数和德·蒙莫特本人的概率论研究。

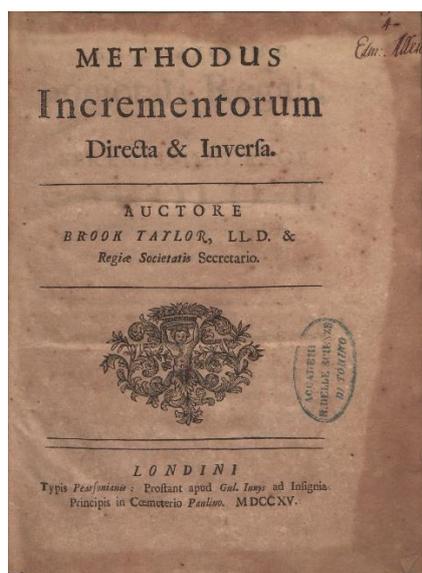


图 2 泰勒著《正向和反向增量算法》（1715）

1715年，他发表了历史上第一篇关于有限差分法的详细论文《正向和反向增量算法》（*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*）并以小册子的形式出版。这部奠基性的论著建立了今天周知的“泰勒级数”，即把实单变量光滑函数作无穷级数展开的第一个一般表达式，也称为“泰勒展开公式”。

用今天的话来说，一个实单变量光滑函数的泰勒级数是无穷多个单项的总和，其中各项以该函数在同一个实数点处的不同阶导数来表示。泰勒级数的前有限项组成一个有限次多项式，称为“泰勒多项式”。这个泰勒多项式是原函数的近似，它通常随着项数的增加而变得更精确地接近原函数。泰勒在这本小册子中建立的“泰勒定理”给出了对使用此类近似而引入的误差的定量估计。不过，当时泰勒的证明并没有考虑级数的收敛性问题，因而后来被认为是不够严谨的。其收敛性条件是后来法国数学家奥古斯丁-路易斯·柯西（Augustin-Louis Cauchy, 1789—1857）给出的。此外，如果在原点展开泰勒级数的话，它就是苏格兰数学家科林·麦克劳林（Colin Maclaurin, 1698—1746）建议的公式，简单好用。

泰勒级数公式的建立并非无源之水、无本之木，它本质上是从苏格兰数学家和天文学家詹姆斯·格雷戈里（James Gregory, 1638—1675）和牛顿的插值公式推广而来。当年，实际上无穷级数已经在数学界被谈论和使用，特别是约翰·伯努利在1694年就已经使用无穷级数的积分。尽管泰勒本人也提及他的无穷展开公式有历史背景和缘由，但他的确是独立地推出展开公式，并且是第一个明确地以一般形式来表述它的人。虽然泰勒书中的命题 XI 和定理 IV 直接等价于约翰·伯努利的积分公式，但是泰勒当时的推导与约翰·伯努利不同之处在于他处理分部积分的过程和技巧。因此，两人有冲突在所难免。当年他们在杂志上辩论时甚至会偶尔使用激烈的措辞。有一次，约翰·伯努利在一封私人信件中提议用更绅士的方式继续进行辩论，但泰勒回复说对方的意思听起来就很尖锐并且“表现出有一种愤慨”，于是不予理会。当然，泰勒不是每次辩论都能赢的。不过，无论如何，历史还是把这个级数展开公式判给了泰勒。据说，“泰勒级数”这个现在固定了的称谓是瑞士数学家西蒙·拉惠利尔（Simon L'Huilier, 1750-1840）于1786年首先使用的。

其实当年在很长一段时间里没有人注意到泰勒级数有什么好处和用处。直到1772年法国数学家约瑟夫-路易斯·拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736—1813）指出它的重要性，甚至视之为“导数计算的基础”（*le principal fondement du calcul différentiel*）之后，泰勒级数展开公式才获得了广泛的关注。

顺便提及，泰勒在上述小册子中还讨论了微分方程奇异解的识别与确定，变量变换问题，以及将函数的导数与其反函数的导数相关联的公式。此外，泰勒还谈及微积分对一些物理问题之应用，其中对弦横向振动的研究是开创性的，他获得了第一个表示弦振动的公式。他也讨论了悬链线振荡的形式及其中心的确定。此外，他还第一次建立了光束在穿越异质介质路径时的微分方程。

## 【二】

来自父亲的教育和影响，让泰勒从小具有音乐和绘画的爱好和天分。在剑桥大学读书时，泰勒留下了一份没有发表的手稿“论音乐”（*On musick*）。

1715年，他发表了《线性透视》（Linear Perspective）以及1719年再版的《线性透视新原理》（New Principles of Linear Perspective）两本关于透视绘图原理的数学书。书中一些插画现在被珍藏在大英博物馆里。

但是泰勒的写作风格非常简要而且不甚清晰，以至约翰·伯努利批评他的书“对所有人来说都是深奥的，对艺术家来说是难以理解的。”后来，英国画家和作家约书亚·柯比（Joshua Kirby, 1716—1774）以及雕刻师和制图员丹尼尔·富尼耶（Daniel Fournier, 1711—1766）对泰勒的两本书加以详细注释，才让它们变得易读易懂。

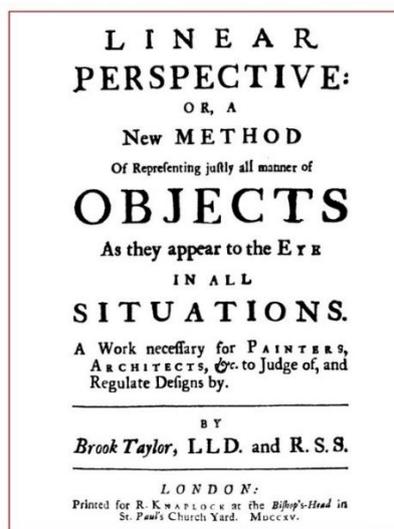


图3 泰勒著《线性透视》（1715）

在这两本书中，泰勒以一系列定理和证明的形式严谨地发展了他的透视数学理论。他在这一领域里最著名的成果是对所有直线和平面的消失点的定义和使用，以及他对透视反问题的理论和实践的发展。这些后来成为了法国-瑞士物理、天文和哲学家约翰·兰伯特（Johann H. Lambert, 1728—1777）相关研究工作的基础，并影响了投影几何学和摄影测量学后来的发展。泰勒还提出了将无限远处的交点与平行线联系起来的方法，直接从透视中构造出原来的几何对象。



British Museum  
Brook Taylor | British ...



British Museum  
Brook Taylor | British Museum



British Museum  
Brook Taylor | British ...



British Museum  
Brook Taylor | British M...

图4 泰勒《线性透视》书中部分插画（大英博物馆）

