

混沌的电路先声：纪念范德波尔

陈关荣

(香港城市大学)

混沌电路是最早见证混沌现象的工程技术实体之一，其历史可以回溯到十九世纪末。1880 年，法国电器工程师让-马里-阿纳托尔·热拉尔-莱斯库耶（Jean-Marie-Anatole Gerard-Lescuyer，生卒年份不详）观察到一个恒定电流驱动的闭合电路会让磁电机的周期性旋转反向。他发表了著名的“电动力学悖论”（paradoxe électrodynamique）实验，后来被认为是最早期电机松弛振荡（relaxation oscillations）现象的发现，而这一现象有可能是混沌振动的先兆。十九世纪末至二十世纪初，物理学家和电器工程师先后研究过一些不同类型的非线性电路方程，它们和混沌的生成及验证密切相关。其中，最为著名的有法国工程师、物理学家安德烈·布隆德尔（André Blondel，1863 年—1938 年）于 1919 年建立的三极管非线性电路方程，以及特别重要的范德波尔振荡器电路方程。



图 1 巴尔塔萨·范德波尔

荷兰物理学家巴尔塔萨·范德波尔（Balthasar van der Pol，1889 年–1959 年）于 1889 年 1 月 27 日出生在荷兰乌特勒支（Utrecht）。他的父亲是一位茶叶商，兴趣广泛且富有文化修养，为儿子发展多方面才能提供了充足机会。范德波尔小时候就读于高等公民学校，并于 1911 年从文理中学毕业。随后，他进入乌特勒支大学攻读物理学和数学，于 1916 年毕业，并以最高荣誉获得物理学学位。

毕业后，范德波尔到了英格兰，在伦敦大学学院 UCL 跟随电器工程师约翰·弗莱明爵士（Sir John A. Fleming，1849 年–1945 年）做研究。1917 年 6 月 2 日，范德波尔在伦敦与皮埃特罗内塔·波斯特胡玛（Pietronetta Posthuma，1893 年–1984 年）结婚，两人后来育有一子二女。翌年，范德波尔转到剑桥大学卡文迪什（Cavendish）实验室，跟随 1906 年诺贝尔物理奖得主约瑟夫·汤姆逊爵士（Sir Joseph J. Thomson，1856 年–1940 年）进修实验物理学。

1919 年，范德波尔回到乌特勒支大学，于 1920 年完成博士学位，论文题目是“电离气体对电磁波传播的影响及其在无线电报和辉光放电测量领域的应用”。

1920 年，范德波尔发表了论文“三极管自由振荡与受迫振荡振幅理论”（A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations），首次系统性地研究了三极管振荡器中由于非线性特性产生的有限振幅振荡。当时范德波尔观察到：线性理论预测振荡幅值会无限增长，而实际电路却总会稳定在某个有限振幅。他发现原因在于电子管的非线性增益，因此认定需要建立非线性微分方程模型。

范德波尔于 1922–1949 年间在荷兰 Eindhoven 的飞利浦物理研究实验室（Philips Natuurkundig Laboratorium）工作，主要研究无线电通信中使用的真空三极管电路。他后来在飞利浦担任无线电科学研究部主任。1927 年，范德波尔因建立了荷兰与荷属东印度群岛之间的首次无线电话通信被授予 Oranje Nassau 骑士勋章。在 1938–1949 年间，范德波尔还担任代尔夫特（Delft）理工大学理论电学讲席教授，之后退休。

范德波尔的大部分研究成果都是在飞利浦实验室工作期间获得的。1925 年，他在电路实验中区分出一类“独特的”振荡现象。他后来指出，这些振荡的周期取决于电容器的放电持续时间，称为“松弛时间”。范德波尔在论文中写道：“准非周期情形的方程形式与通常的近似正弦解截然不同，但却再次呈现出纯粹的周期解……”他当时并未意识到，这一周期解正是昂利·庞加莱（J. Henri Poincaré，1854 年–1912 年）早年所定义的极限环（limit cycle）。

1926 年，范德波尔在研究自激振荡现象时建立了非线性微分方程

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

其中， $x(t)$ 表示系统状态（如电压）而 $\mu > 0$ 表示非线性程度。这一方程具有十分巧妙的阻尼机制：当 $|x| < 1$ 时， $-\mu(1 - x^2)\dot{x}$ 对应负阻尼，系统获得能量；当 $|x| > 1$ 时， $-\mu(1 - x^2)\dot{x}$ 对应正阻尼，系统耗散能量。因此，振荡会自动调整到稳定幅度。这是最早的自振荡数学模型之一。

同年，范德波尔进一步发现：当 $\mu \gg 1$ 时，系统不再近似正弦振荡，而表现为长时间缓慢变化以及突然快速跳变，形成“松弛振荡”（relaxation oscillations）。

他 1926 年发表的经典论文“论松弛振荡”建立了这个新概念，后来影响了多谐振荡器、触发电路、脉冲电子学、神经元模型等研究方向的发展。

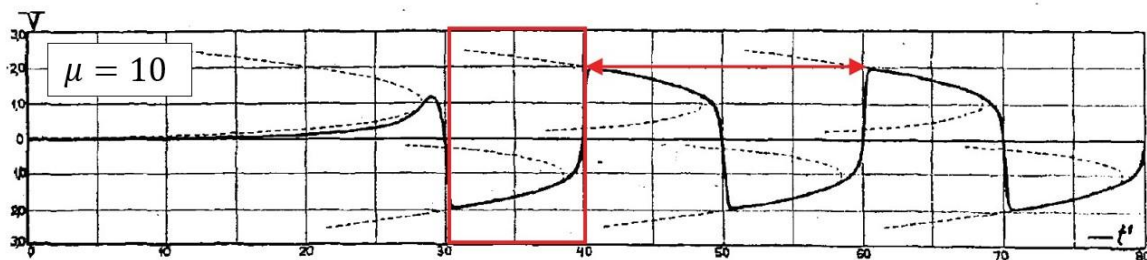


图2 范德波尔振荡器的松弛振荡（1926年）

范德波尔的实验结果显示：无论初始条件如何，轨道最终都会趋向同一个周期轨道。后来数学家认识到，这正是庞加莱早期观察到并研究过的极限环现象：“满足我们微分方程的闭合曲线，以及由同一方程定义、渐近趋近于这些闭合曲线却不与之重合的其他曲线。”

1945年，英国数学家玛丽·卡特赖特（Mary Lucy Cartwright，1900年–1998年）和约翰·李特尔伍德（John E. Littlewood，1885年–1977年）仔细地研究过范德波尔方程，从分析中发现了一些意想不到的复杂动力学现象，包括不连续周期运动的存在。洛伦茨（Edward N. Lorenz，1917年–2008年）在《混沌的本质》（The Essence of Chaos, 1995）一书中也提及范德波尔的实验结果。后来，范德波尔振荡器成为极限环理论最经典的实例。

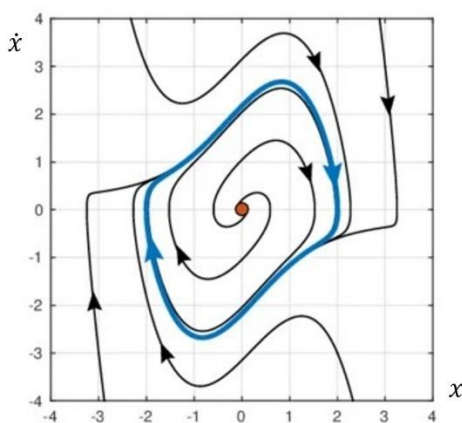


图3 范德波尔振荡器的极限环（1926年）

1927年9月，范德波尔和合作者尤普·范德马克（Joep van der Mark）在《自然》（Nature）杂志上发表一篇短文，建立了一个强迫松弛振荡器的微分方程：

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = b\mu\lambda \cos(\lambda t + \alpha)$$

式中 μ, b, λ, α 为参数。范德波尔的突破性贡献在于，他提出了一个普适性的无量纲方程，能够用于解释各种系统而不受其具体物理特性的限制。

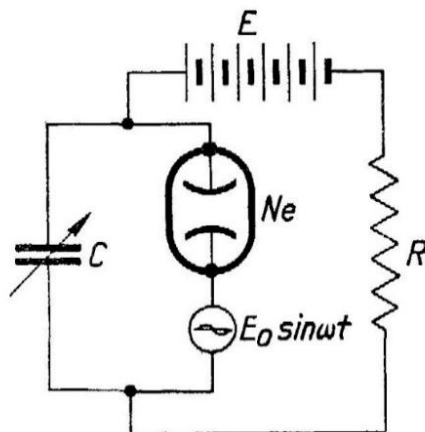


图 4 范德波尔 1927 年在《自然》杂志上发表的实验电路

(N_e = Neon glow lamp, R = resistance, C = variable condenser,
 E = Battery, E_0 = constant, ω = frequency, t = time.

B. van der Pol and J. van der Mark, "Frequency demultiplication", Nature, 1927)

后来知道，这个方程和英国物理学家约翰·瑞利勋爵（Lord John W. S. Rayleigh, 1842 年–1919 年）建立的方程是等价的。这位瑞利勋爵 1904 年获诺贝尔物理奖。此外，范德波尔方程还可以看作是法国物理学家、工程师阿尔弗雷德-玛丽·李纳德（Alfred-Marie Liénard, 1869 年–1958 年）方程的一种特别情形。不过，李纳德方程极限环的存在性是范德波尔在 $\mu > 0$ 和 $b = 0$ 条件下从实验中证实的。在 $\mu > 0$ 和 $b \neq 0$ 以及 $\lambda \neq 0$ 即有驱动信号输入时，在某种自然频率下他听到了来自这个确定性系统内部的“毫无规律的噪声”。对之，文章没有做出进一步的解释。后来科学家们认识到，那是在最早在实验中观察到物理混沌现象的报告。因此，范德波尔振荡器也被视为混沌理论发展的先驱模型之一。今天，许多非线性动力学教材仍以它作为第一范例。

成功构建电路及其方程之后，范德波尔与范德马克继续合作，将这一思想应用于人体“脉搏”的描述，从而构建了一个脉动电位定量模型。这些研究促使他接触到了英国数学家、工程师奥利弗·亥维赛（Oliver Heaviside, 1850 年–1925 年）用于处理微分方程的算子演算（operational calculus）。1929 年，范德波尔向《哲学杂志》（Philosophical Magazine）提交了关于算子演算的论文，后来又与 Hendricus Bremmer 合作撰写了《基于双边拉普拉斯积分的算子演算》（Operational Calculus based on the Two-sided Laplace Integral）一书，1950 年由剑桥大学出版社出版。

二十世纪 30 年代以后，人们发现大量自然振荡过程都与范德波尔振荡器具有相同机制，特别是心脏节律。1961 年，美国生物物理学家理查德·菲茨休（Richard FitzHugh, 1922 年–2007 年）以及日本电子工程、生物物理学家南云仁一（Jinichi Nagumo, 1926 年–1999 年）分别将范德波尔方程推广为现在周知的 FitzHugh–Nagumo 模型，用于描述神经脉冲传播，成为现代计算神经科学的重要基础。

今天，范德波尔振荡器已经成为非线性科学的标准模型，被广泛应用于无线电工程、电路振荡器、激光物理、MEMS 振荡器、神经动力学、心律分析、地震模型、生物节律、同步现象以及混沌信号研究等领域。

值得提及的是，范德波尔一生对数论尤有兴趣。1947 年，他发表了一篇题为“临界带内黎曼 ζ 函数的机电法研究”论文（Bull. Amer. Math. Soc. 53(10): 976–981）。在该研究中，他巧妙地把无线电技术和数论相结合，探究黎曼 $\zeta(s)$ 函数零点在 $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 临界线上的分布。他在纸盘圆周作锯齿形状的切割，然后让光束穿过锯齿缺口投射到光电管上，由此产生的光电流形成一份关于 $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ 的模的实测曲线，描绘了该函数模值随参数 t 变化的情况。通过这份记录，他读取出了 ζ 函数的前 73 个零点。不过，随着参数 t 值增大，读数的精确度逐渐降低而最终变得无效。此外，范德波尔对 θ 函数兴趣特浓，为之还发表过 4 篇数学论文。1951 年，范德波尔发表论文“The primes in $k(p)$ ”（Indagationes Mathematicae, 54: 9–15），以图形展示了由单位本原立方根定义的二次域中的素数列表。该图基于正六边形构建，列出了所有范数不超过 10,000 的素数，其图形的对称性呈现出一种惊艳的美感。

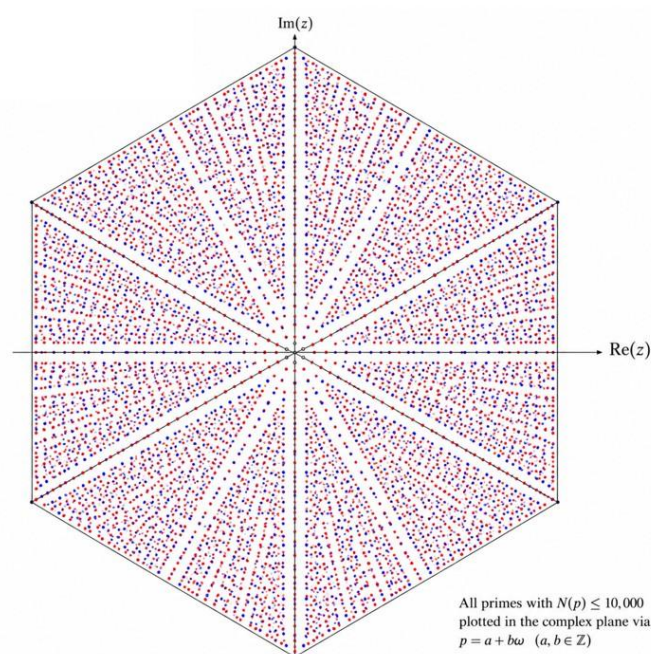


图 5 素数分布六边形（1951 年）

范德波尔是荷兰无线电协会创始人之一并多年连任主席，也是国际无线电扩散联盟和国际无线电科学联盟成员。1957 年，他被选为法国科学院通讯院士。1959 年 10 月 6 日，范德波尔在荷兰瓦瑟纳尔（Wassenaar）去世，享年 70 岁。